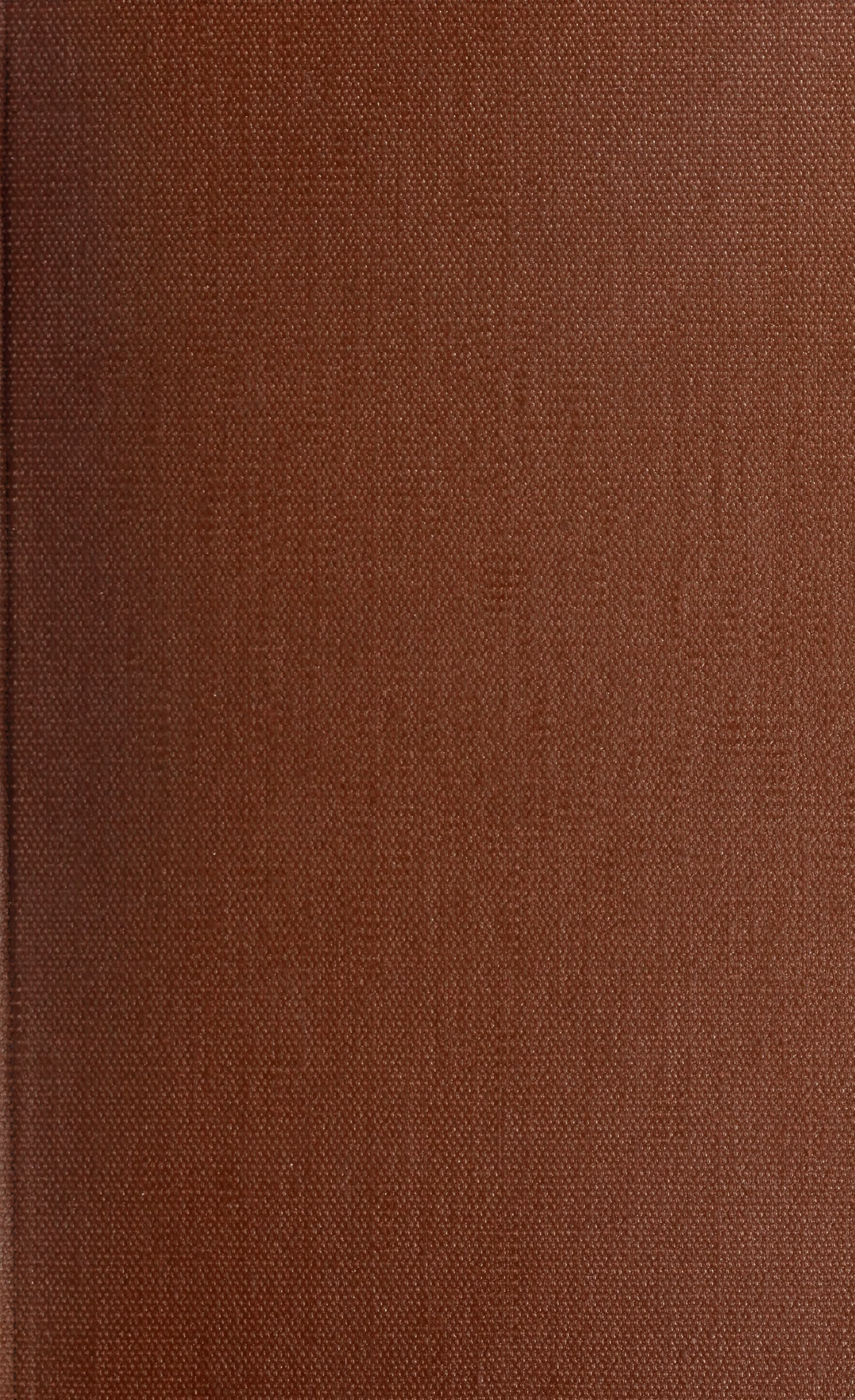


ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES
EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

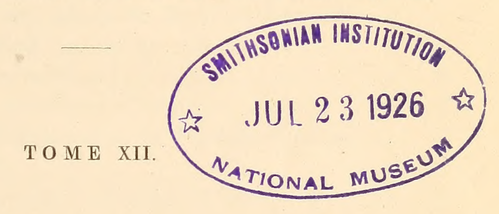
LA SOCIETÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES A HARLEM,

ET REDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER
Sécrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot** et **S. C. Snellen van Vollenhoven.**



TOME XII.

HAARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES,
1877.

TABLE DES MATIÈRES.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

DE L'INFLUENCE

DU

MOUVEMENT D'UNE SOURCE VIBRATOIRE

SUR

l'intensité des vibrations émises,

PAR

R. A. MEES.

Dans un Mémoire: *Ueber die Intensität der wahrgenommenen Schwingungen bei Bewegung der Schwingungsquelle und des Beobachters* [1]), M. R. Eötvös examine de quelles grandeurs cette intensité dépend, et cet examen le conduit à des résultats qui ne s'accordent pas avec les hypothèses admises par M. Ketteler dans son *Astronomische Undulations-theorie* [2]). Il commence par proposer deux noms nouveaux, dont nous ferons usage dans ce qui va suivre, pour désigner des grandeurs dont la considération se présente à chaque pas, quand on étudie les phénomènes vibratoires tels qu'ils sont modifiés par le mouvement de la source vibrante ou par celui de l'observateur. Il distingue, en effet, deux distances de la source au point dont on considère l'état vibratoire, à savoir, la distance ,,momentanée", celle qui existe réellement après le temps t entre la source et le point vibrant,

---

[1]) Pogg. *Ann.*, t. CLII, p. 513.

[2]) E. Ketteler, *Astronomische Undulations-theorie oder die Lehre von der Aberration des Lichtes*, Bonn, 1873.

et la distance „active", celle qui sépare ce point du lieu qu'occupait la source au moment où elle se trouvait dans la phase de vibration qui maintenant, après le temps t, est passée au point vibrant. La distance active à l'époque t correspond à la distance momentanée à une époque antérieure t_1, de telle sorte que $t - t_1$ représente l'intervalle de temps qui est nécessaire aux vibrations pour aller de la source au point vibrant, c'est-à-dire, pour parcourir la distance active à l'époque t.

Soient D la distance momentanée et δ la distance active à l'époque t; nous avons alors:

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= \delta^2 - 2\,\delta\, g\,(t - t_1)\cos\psi + g^2\,(t - t_1)^2 \\ D^2 &= \delta^2 \left(1 - 2\frac{g}{v}\cos\psi + \frac{g^2}{v^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

à cause de $t - t_1 = \frac{\delta}{v}$, v représentant la vitesse de propagation des vibrations, et g la vitesse du mouvement de la source vibratoire, mouvement qui est supposé avoir lieu dans une direction faisant un angle ψ avec celle de la distance active δ. Quant au point vibrant, nous le supposons, ici et dans la suite, dépourvu de tout mouvement de translation. Si, comme il est permis de le faire dans presque tous les cas que nous présente la nature, nous négligeons la seconde puissance de la petite grandeur $\frac{g}{v}$, ainsi que les puissances supérieures, la relation entre la distance momentanée et la distance active est exprimée très simplement par les formules

$$D = \delta\left(1 - \frac{g}{v}\cos\varphi\right) \text{ et } \delta = D\left(1 + \frac{g}{v}\cos\psi\right) \quad . . (2)$$

Pour le cas d'une source vibratoire animée d'un mouvement de translation et émettant des vibrations dans toutes les directions, M. Ketteler [1]) admet que l'amplitude ou l'écart maximum des vibrations détermines en un point quelconque de l'espace par la

[1]) *l. c.*, *Zusatz* F, p. 136.

source vibratoire peut être représentée par l'expression $\frac{a}{\delta}$, a étant une constante qui ne renferme ni g ni ψ. M. Eötvös, au contraire, admet la même chose pour la vitesse maximum des vibrations, ou, comme il l'appelle, l'amplitude de la vitesse; il la représente par $\frac{\alpha}{\delta}$, α étant une constante, tout comme a chez M. Ketteler. Ces deux hypothèses de M. Eötvös et de M. Ketteler sont en contradiction l'une avec l'autre, ainsi que nous aurons plus loin l'occasion de le montrer. M. Eötvös déduit son hypothèse d'un principe concernant la force vive des vibrations, principe qui lui sert de base et qu'il énonce de la manière suivante. Si l'on admet que le mouvement de translation de la source n'ait pas d'influenee sur son mouvement vibratoire, la conséquence immédiate de cette supposition est que dans chacune de ses vibrations la source communique à la matière ambiante, sous forme de vibrations transmises, une quantité de force vive qui est la même dans le cas où la source est en repos que dans le cas plus général où la source se meut. M. Eötvös se figure maintenant un corps qui n'émet de vibrations que selon deux directions opposées, cas dans lequel la surface d'onde se compose de deux surfaces planes situées à des distances égales de part et d'autre du corps, et dans lequel, par conséquent, les vibrations n'éprouvent aucun affaiblissement à mesure qu'elles se propagent. Il cherche alors la somme des forces vives qui, à raison des vibrations, existent à un moment donné dans deux ondes entières, situées l'une en avant l'autre en arrière du corps; cette somme des forces vives, il l'exprime d'abord pour le cas où le corps est en repos, et ensuite pour le cas où il se meut dans une des deux directions suivant lesquelles il émet ses vibrations. Les deux expressions ainsi trouvées il les égale l'une à l'autre, et obtient par là l'équation suivante:

$$\alpha_1^2 (v-g) + \alpha_2^2 (v+g) = 2\,\alpha^2 v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dans laquelle α représente l'amplitude de la vitesse des vibrations émises, lorsque le corps est en repos, tandis que α_1 et α_2 désignent

cette même grandeur, en avant et en arrière, lorsque le corps est en mouvement.

A cette équation satisfait l'hypothèse $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Lorsqu'on admet au contraire, avec M. Ketteler, que ce ne sont pas les amplitudes de la vitesse mais les amplitudes de la vibration qui sont égales dans les trois ondes différentes des deux cas en question, on parvient à l'équation:

$$a^2 \frac{v}{v-g} + a^2 \frac{v}{v+g} = 2a^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

a représentant l'amplitude de la vibration. Or, cette équation est évidemment fausse, et M. Eötvös croit pouvoir en conclure que son hypothèse à lui, non celle de M. Ketteler, est d'accord avec le principe mis en avant au sujet de la force vive, que par conséquent son hypothèse est vraie, celle de M. Ketteler fausse.

La première remarque que cette conclusion me suggère, c'est que le principe de M. Eötvös concernant la force vive, bien qu'assez probable, ne me semble pas tout à fait certain. Selon lui, la force vive émise par la source vibratoire serait la même, que cette source soit en repos ou en mouvement. Mais il pourrait très bien se faire que la constance ainsi attribuée par M. Eötvös à la force vive dût être attribuée à l'énergie totale émise par la source. Dans cette hypothèse, très vraisemblable à mon avis, il serait possible que le rapport entre la force vive et l'énergie totale des vibrations émises ne restât pas la même lorsque la source vibratoire, au lieu d'être en repos, a un mouvement de translation. S'il en était ainsi, ce que je ne regarde toutefois pas comme probable, — l'énergie totale des vibrations émises demeurerait constante, sans qu'il en fût de même de la force vive.

Mais, acceptons pour vrai le principe admis par M. Eötvös; il faut alors observer, en second lieu, que l'on ne satisfait pas seulement à l'équation (3) par la supposition $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, mais qu'il y a encore d'autres solutions de cette équation, dans lesquelles α_1 et α_2 sont des fonctions de g. Si nous prenons, en effet,

$$\alpha_1 = \psi(g, \alpha) \text{ et } \alpha_2 = \psi(-g, \alpha),$$

l'équation (3) devient:

$$\frac{\psi^2(g,\alpha)-\alpha^2}{v+g}=-\frac{\psi^2(-g,\alpha)-\alpha^2}{v-g},$$

et en posant

$$\frac{\psi^2(g,\alpha)-\alpha^2}{v+g}=\varphi(g,\alpha),$$

on obtient:

$$\alpha_1{}^2=\psi^2(\ g,\alpha)=(v+g)\,\varphi(\ g,\alpha)+\alpha^2$$
$$\alpha_2{}^2=\psi^2(-g,\alpha)=(v-g)\,\varphi(-g,\alpha)+\alpha^2,$$

où la fonction $\varphi(g,\alpha)$ est seulement liée à la condition que l'on ait: $\varphi(-g,\alpha)=-\varphi(g,\alpha)$.

Très probablement, $\varphi(g,\alpha)$ est de la forme $\alpha^2\times\chi(g)$, de sorte qu'on a:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1{}^2&=\alpha^2\{1+(v+g)\,\chi(\ g\ )\}\\ \alpha_2{}^2&=\alpha^2\{1+(v-g)\,\chi(-g)\}\\ &=\alpha^2\{1-(v-g)\,\chi(\ g\ )\}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

où

$$\chi(-g)=-\chi(g).$$

M. Eötvös fait $\varphi(g,\alpha)$ et $\chi(g)=0$, mais cela n'est nullement nécessaire. Toute fonction de puissance impaire de g peut être prise pour $\chi(g)$. Le cas traité par M. Eötvös, celui dans lequel une source vibratoire émet des ondes planes dans deux directions seulement, ne nous apprend rien au sujet de la forme de la fonction χ. Considérons donc le cas plus général, celui où la source envoie des vibrations dans toutes les directions et où nous avons affaire à des surfaces d'onde sphériques, et voyons s'il est possible d'en déduire quelque chose de plus précis concernant cette fonction χ.

Lorsque la source vibratoire est en repos, les vibrations s'étendent suivant des ondes sphériques; tous les points ayant une même phase de vibration se trouvent sur une même surface de sphère, et toutes ces surfaces ont le même centre, à savoir, la source vibratoire, que nous supposons ici réduite à un point. Si la source vibratoire est emportée d'un mouvement de translation, les surfaces de même phase sont encore des surfaces de sphères,

mais celles-ci ne sont plus concentriques. Ces surfaces ont alors pour rayon la distance active de la source vibratoire, et pour centre le lieu qu'occupait la source à l'instant où elle émettait la phase de vibration qui, au moment actuel, atteint la surface sphérique considérée.

Représentons-nous (Pl. I, fig. 1) une coupe des surfaces d'onde au temps t, coupe menée par la trajectoire, supposée ici rectiligne, de la source vibrante. Soient A et C les positions de la source au commencement et à la fin d'une vibration, $B\,B'\,B''\,B'''$ et $D\,D'\,D''\,D'''$ les surfaces d'onde, au temps t, des vibrations émises par A et C. Soieut $F\,F'\,F''\,F'''$ et $H\,H'\,H''\,H'''$ les surfaces d'onde qui correspondent respectivement aux positions E et G de la source vibratoire. Prenons provisoirement P pour l'origine des coordonnées, et soient r le rayon vecteur d'un point du cercle H, ψ l'angle que ce rayon fait avec la droite P A C, δ le rayon G H de ce cercle, D la distance P G [1]); l'équation de ce cercle est alors:

$$r = D \cos \psi + \sqrt{\delta^2 - D^2 \sin^2 \psi}.$$

Si nous représentons par $\delta + d\,\delta$ le rayon du cercle F, et par $D + d\,D$ la distance de son centre à l'origine P, ce cercle possédera, pour l'angle ψ, un rayon vecteur $r + d\,r$, tel que $d\,r$ ait la valeur:

$$d\,r = d\,D \cos \psi - \frac{D\,d\,D \sin^2 \psi}{\sqrt{\delta^2 - D^2 \sin^2 \psi}} + \frac{\delta\,d\delta}{\sqrt{\delta^2 - D^2 \sin^2 \psi}}.$$

Transposons maintenant l'origine en G, on a alors $D = 0$, et par conséquent: $dr = d\,D \cos \psi + d\,\delta$. On a aussi, dans ce cas: $G\,M = r = \delta$, $G\,N = r + dr$, donc $N\,M = -dr$, $M\,G\,B = \psi$; posant en outre $L\,G\,M = d\,\psi$, l'élément de surface L M N O sera exprimé par:

$$-r\,d\,\psi\,dr = -\delta\,(d\,D \cos \psi + d\delta)\,d\,\psi.$$

Mais les surfaces d'onde sont toutes des surfaces de révolution

[1]) D et, temporairement, ψ n'ont plus ici la même signification que précédemment.

autour de la ligne A B, et dans chaque section plane passant par A B les circonstances sont identiquement les mêmes. Réunissant donc tous les éléments de volume pour lesquels δ et ψ ont les mêmes valeurs, nous obtenons pour l'élément de volume:

$$dV = (-r\,d\psi\,dr)\,2\pi r \sin\psi$$
$$= -2\pi\delta^2 \sin\psi\,d\psi\,(dD\cos\psi + d\delta).$$

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que δ et ψ ont ici de nouveau la même signification que précédemment, c'est-à-dire, qu'ils représentent la distance active et l'angle compris entre celle-ci et la direction du mouvement de la source vibratoire. Si maintenant dt est le temps nécessaire à la source vibrante pour passer de la position G à la position E, et si g et v ont la même signification qui leur a été attribuée plus haut, on a:

$$dD = g\,dt \quad \text{et} \quad d\delta = -v\,dt,$$
$$dV = 2\pi v\delta^2\,dt \sin\psi\,d\psi - 2\pi g\delta^2\,dt \sin\psi\cos\psi\,d\psi.$$

Soit $C\,f(t)$ la vitesse de vibration de la source au temps t; si la source était immobile, la vitesse de vibration à la distance δ de la source, au temps t, serait: $\frac{\alpha}{\delta} f\left(t - \frac{\delta}{v}\right)$, α étant une constante. Si la source est en mouvement, la vibration du point L, au temps t, sera dans la même phase où était la vibration de la source lorsque celle-ci se trouvait en G, c'est-à-dire, au temps $t - \frac{\delta}{v}$. Soit, à cet instant, $\frac{\alpha(g, \psi)}{\delta}$ l'amplitude de la vitesse au point L, et supposons qu'on ait:

$$\alpha^2(g, \psi) = \alpha^2 \{1 + (v + g\cos\psi)\,\chi(g\cos\psi)\}, \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

expression qui, pour $\psi = 0$ et $= 180°$, devient évidemment identique aux expressions (5), que nous avons trouvées précédemment pour ces cas particuliers; nous pourrons alors représenter la vitesse de vibration en L par

$$u = \frac{\alpha(g, \psi)}{\delta} f\left(t - \frac{\delta}{v}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

La force vive qui réside dans l'élément dV au temps t est, ϱ représentant la densité de la matière vibrante:

$$\tfrac{1}{2}\varrho u^2 dV = \pi\varrho v \alpha^2 f^2 \left(t - \frac{\delta}{v}\right) dt \{1 + (v + g\cos\psi)\,\chi(g\cos\psi)\} \sin\psi\, d\psi$$

$$-\pi\varrho g \alpha^2 f^2 \left(t - \frac{\delta}{v}\right) dt \{1 + (v + g\cos\psi)\,\chi(g\cos\psi)\} \sin\psi \cos\psi\, d\psi.$$

En intégrant cette expression par rapport à ψ entre les limites 0 et π, nous obtenons la force vive qui est contenue, au temps t, entre les deux surfaces d'onde correspondant aux positions G et E de la source vibratoire. Cette force vive est:

$$\Delta U = 2\pi\varrho v \alpha^2 f^2 \left(t - \frac{\delta}{v}\right) dt +$$

$$\pi\varrho\alpha^2 f^2 \left(t - \frac{\delta}{v}\right) dt \{ v \int_0^\pi (v + g\cos\psi)\,\chi(g\cos\psi) \sin\psi\, d\psi$$

$$- g \int_0^\pi (v + g\cos\psi)\,\chi(g\cos\psi) \sin\psi \cos\psi\, d\psi \}.$$

Pour l'expression entre parenthèses dans le second terme nous pouvons écrire:

$$\int_0^\pi (v^2 - g^2\cos^2\psi)\,\chi(g\cos\psi) \sin\psi\, d\psi.$$

Mais cette intégrale est nulle, parce que χ est une fonction de puissance impaire, et que par conséquent $\chi(g\cos\psi)$ prend entre $\frac{\pi}{2}$ et π des valeurs égales mais de signe contraire à celles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, tandis que tous les autres facteurs sous le signe d'intégration ont entre $\frac{\pi}{2}$ et π les mêmes valeurs, avec le même signe, qu'entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. ΔU se réduit donc à son premier terme:

$$\Delta U = 2\pi\varrho v \alpha^2 f^2 \left(t - \frac{\delta}{v}\right) dt,$$

c'est-à-dire, que le mouvement de la source vibratoire n'apporte aucun changement à l'expression de Δ U. La force vive émise pendant l'intervalle de temps *dt* par la source vibratoire est la même, que cette source soit en repos ou en mouvement. Etant vrai pour tout intervalle de temps *dt*, cela est vrai aussi pour la durée d'une vibration entière.

Nous avons regardé la densité ϱ de la matière vibrante comme constante. En toute rigueur, le calcul précédent ne s'applique donc qu'aux vibrations qui n'occasionnent pas de changement dans la densité de la matière. Toutefois, même pour les vibrations qui donnent lieu à de pareils changements, ce calcul est encore valable si l'on néglige les petites grandeurs d'ordre supérieur; en effet, ce sont seulement, au moins pour les vibrations de faible amplitude, des quantités d'ordre supérieur qui s'introduisent dans nos formules quand on regarde la densité comme variable. La même remarque s'applique au calcul de M. Eötvös, pour le cas plus simple qui a été traité par lui.

Nous voyons d'après cela, que, tant pour les vibrations qui se propagent par ondes planes et en deux directions seulement, que pour celles qui se propagent par ondes sphériques dans toutes les directions, on satisfait également bien au principe de M. Eötvös concernant la force vive, soit en admettant avec lui que l'amplitude de la vitesse est pour tous les points simplement en raison inverse de la distance active, soit en la regardant en outre comme proportionnelle à une grandeur $\alpha\,(g, \psi)$, qui n'a pas, comme chez M. Eötvös, une valeur constante $= \alpha$, mais qui est déterminée par la formule

$$\alpha^2\,(g, \psi) = \alpha^2 \{1 + (v + g\cos\psi)\,\chi\,(g\cos\psi)\},$$

et par conséquent dépendante de g et de ψ. Le cas général, celui où les vibrations s'étendent dans toutes les directions, ne nous apprend donc, au sujet de la forme réelle de la fonction χ, rien que ce qui nous était déjà connu, à savoir, que c'est une fonction de puissance impaire.

———

Supposons (fig. 2) qu'un point, qui fonctionne comme source vibratoire, se meuve le long de l'axe OX des x avec une vitesse g, et qu'au temps $t = 0$ il se trouve à l'origine O des coordonnées. Cherchons le mouvement d'un point vibrant (x, y, z) au temps t. Les coordonnées de ce point étant alors $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, la quantité totale dont il s'est écarté de sa position d'équilibre sera $\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Si δ est la distance active au temps t, on a:

$$x' = g\left(t - \frac{\delta}{v}\right),\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \varrho^2,$$

$$\delta^2 = (x - x')^2 + \varrho^2 = \left(x - g\,t + \frac{g}{v}\,\delta\right)^2 + \varrho^2,$$

$$\frac{\delta}{v} = \frac{g\,(x - gt) + \left\{v^2(x - gt)^2 + (v^2 - g^2)\,\varrho^2\right\}}{v^2 - g^2};$$

et en négligeant les puissances deuxième et supérieures de $\frac{g}{v}$ et de $\frac{g\,t}{r}$, — ce qui même pour la seconde de ces grandeurs est permis, à condition de choisir convenablement l'origine du temps et celle des coordonnées —, on obtient:

$$\delta = \frac{g}{v}\left(x - gt\right) + \left\{\left(x - gt\right)^2 + \varrho^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{g}{v}\left(x - gt\right) + r\left\{1 - 2\,\frac{x}{r}\cdot\frac{g\,t}{r} + \frac{g^2t^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{g}{v}\left(x - gt\right) + r\left(1 - \frac{x}{r}\cdot\frac{g\,t}{r}\right)$$

$$= r\left(1 - \frac{x}{r}\cdot\frac{g\,t}{r} + \frac{x}{r}\cdot\frac{g}{v}\right).$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{x}{r}\cdot\frac{g\,t}{r} - \frac{x}{r}\cdot\frac{g}{v}\right)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{g}{v}\,\frac{x}{r^3}\left(r - v\,t\right).$$

Pour la vitesse de vibration $\frac{d\,\sigma}{d\,t}$ nous pouvons écrire:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{S}{\delta} \cos \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) - \alpha \right\},$$

expression où S peut encore être fonction de g et de ψ.

Supposons-la provisoirement constante; alors, attendu qu'on a:

$$\frac{\delta \sigma}{dt} = \frac{S}{r} \left\{ 1 - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^2} \left(r - vt \right) \right\} \cos \left\{ k \left(1 + \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r} \right) t - k \frac{r}{v} - k \frac{g}{v^2} x - \alpha \right\},$$

si nous regardons δ comme variable aussi bien en dehors qu'en dedans du signe cosinus, l'intégration donnera:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{dt} dt = \frac{S}{r} \left\{ 1 - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^2} \left(r - vt \right) \right\} \frac{\sin \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) - \alpha \right\}}{k \left(1 + \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r} \right)}$$

$$+ \frac{S g x}{r^2} \cdot \frac{\cos \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) - \alpha \right\}}{k^2 \left(1 + \frac{g}{v} \frac{x}{r} \right)^2}$$

$$= \frac{S}{k} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^3} \left(2r - vt \right) \right\} \sin \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) - \alpha \right\}$$

$$+ \frac{S g x}{k^2 r^3} \cos . \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) - \alpha \right\}$$

Nous négligleons ici non-seulement les puissances supérieures de $\frac{g}{v}$ et de $\frac{gt}{r}$, mais aussi celles de $\frac{g}{k}$, ce qui est permis, parce qu'on a $k > v$, à cause de $k = \frac{2\pi}{\lambda} v$, où λ représente la longueur d'onde.

Mais si l'on a:

$$x' = X' \cos M \qquad\qquad = X' \cos \left(N + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$x'' = X'' \sin M = X'' \cos \left(M - \frac{\pi}{2} \right) = X'' \cos \left(N - \frac{\pi}{4} \right),$$

il en résulte:

$$x' + x' = X \cos\left(N - \beta\right) = X \cos\left(M - \frac{\pi}{4} - \beta\right),$$

avec les valeurs

$$X = \sqrt{X'^2 + X''^2} \quad \text{et} \quad tg\,\beta = \frac{X'' - X'}{X'' + X'}.$$

Appliquant ceci à l'expression trouvée pour σ, nous obtenons:

$$X = \frac{S}{k}\left\{\frac{1}{r} - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^3}(2r - vt)\right\}$$

$$= \frac{S}{k}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^2}\right),$$

$$tg\,\beta = 1 - 2\frac{g}{k} \cdot \frac{x}{r^2},$$

ou, en posant $\beta = \frac{\pi}{4} - \tau$, de sorte que τ soit une petite grandeur du même ordre que $\frac{g}{k}$:

$$tg\,\beta = \frac{1 - tg\,\tau}{1 + tg\,\tau} = \frac{1 - \tau}{1 + \tau} = 1 - 2\tau$$

$$\tau = \frac{g}{k} \cdot \frac{x}{r^2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{g}{k} \cdot \frac{x}{r^2}.$$

$$\sigma = \frac{S}{k}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^2}\right) \cos\left\{k\left(t - \frac{\delta}{v}\right) - \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{g}{k} \cdot \frac{x}{r^2}\right\}$$

$$= \frac{S}{k}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^2}\right) \sin\left\{k\left(t - \frac{\delta}{v}\right) + \frac{g}{k}\,\frac{x}{r^2} - \alpha\right\}$$

Mais on a:

$$\cos\psi = \frac{x - x'}{\delta} = \frac{x}{\delta} - \frac{g\,t}{\delta} + \frac{g}{v},$$

$$\frac{g}{v}\cos\psi = \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{\delta} = \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r^2} = \frac{g}{v} \cdot \frac{\cos\psi}{\delta}.$$

Nous pouvons donc aussi écrire pour σ:

$$\sigma = \frac{S}{k} \cdot \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{g}{v}\cos\psi\right) \sin\left\{k\left(t - \frac{\delta}{v}\right) + \frac{g}{k} \cdot \frac{x}{r^2} - \alpha\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Si, dans l'intégration de $\frac{d\sigma}{dt}$, nous avions traité la grandeur δ comme variable seulement sous le signe cosinus, mais comme constante en dehors de ce signe, — ce qui à vrai dire peut être jugé suffisamment exact, attendu que sous le signe cosinus les termes qui contiennent δ sont précédés du grand facteur k, tandis que cela n'est pas le cas en dehors du signe, — nous aurions obtenu pour σ :

$$\sigma = \frac{S}{k} \cdot \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{g}{v} \cos \psi\right) \sin \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v}\right) - \alpha \right\} \dots \dots (9a)$$

Lors donc que nous regardons la vitesse maximum de la vibration comme ne dépendant qu'implicitement de g et ψ, en tant que δ, à laquelle elle est inversement proportionnelle, varie avec ces grandeurs, nous trouvons que l'amplitude maximum de la vibration est, en outre, explicitement dépendante de g et de ψ.

Mais nous avons vu précédemment que, pour satisfaire au principe suivant lequel la quantité de force vive des vibrations émises est indépendante du mouvement de la source vibratoire, il n'est pas absolument nécessaire que la grandeur S soit constante, qu'elle peut aussi être une fonction de g et de ψ. Si s représente la valeur de S dans le cas où la source vibratoire est immobile, nous avons vu que S doit être en général de la forme :

$$S^2 = s^2 \left\{ 1 + (v + g \cos \psi)\, \chi\, (g \cos \psi) \right\},$$

où χ est une fonction de puissance impaire.

Dévéloppons χ en série suivant les puissances ascendantes impaires de $g \cos \psi$; comme la différence entre S et s doit évidemment être une grandeur du même ordre que $\frac{g}{v}$, le premier terme de cette série, le seul que nous ayons à considérer si nous négligeons de nouveau les puissances deuxième et suivantes de $\frac{g}{v}$, pourra être représenté de cette manière :

$$\chi (g \cos \psi) = n \frac{g \cos \psi}{v^2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

n désignant un nombre quelconque.

On obtient alors:

$$S^2 = s^2 \left\{ 1 + n \left(\frac{g}{v} \cos \psi + \frac{g^2}{v^2} \cos^2 \psi \right) \right\}$$

$$S = s \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{g}{v} \cos \psi \right); \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

mais on a

$$\frac{g}{v} \cos \psi = \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r},$$

donc:

$$S = s \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{g}{v} \cdot \frac{x}{r} \right)$$

En ne tenant de nouveau compte que des termes qui contiennent $\frac{g}{v}$ et $\frac{g t}{r}$ à la première puissance, S est donc indépendant de t; par conséquent, dans l'intégration de $\frac{d\sigma}{dt}$ par rapport à t, nous pouvons continuer, ici encore, à regarder S comme une constante. Nous avons dans ce cas:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{s}{\delta} \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{g}{v} \cos \psi \right) \cos \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) - \alpha \right\} \ldots \ldots (12)$$

$$\sigma = \frac{s}{k} \left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{g}{v} \cos \psi \right) \sin \left\{ k \left(t - \frac{\delta}{v} \right) + \frac{g}{k} \cdot \frac{x}{r^2} - \alpha \right\} (13)$$

Si nous donnons à n, laissé jusqu'ici arbitraire, la valeur 2, la vitesse maximum de la vibration devient $\frac{s}{\delta} \left(1 + \frac{g}{v} \cos \psi \right)$, et par conséquent à la fois explicitement et implicitement dépendante de g et de ψ, tandis que l'amplitude maximum de la vibration devient $\frac{s}{k} \cdot \frac{1}{\delta}$, c'est-à-dire, ne dépend qu'implicitement de g et de ψ. Ce résultat est précisément l'inverse de celui obtenu précédemment. On voit donc que les hypothèses de M. Eötvös et de

M. Ketteler doivent être regardées toutes les deux comme des cas particuliers du cas général où n a une valeur quelconque. Pour $n = 0$ nous avons l'hypothèse de M. Eötvös, pour $n = 2$ celle de M. Ketteler.

D'après M. Eötvös, la vitesse maximum de la vibration est égale à $\frac{s}{\delta}$; d'après M. Ketteler, elle est égale à $\frac{s}{D}$, où entre, à la place de la distance active δ, la distance momentanée D, liée à la première par la formule (2). Il en résulte immédiatement que l'intensité des vibrations, produites en un point fixe de l'espace par une source animée d'un mouvement de translation, dépend chez M. Ketteler de la distance momentanée, et chez M. Eötvös, au contraire, de la distance active. M. Ketteler et M. Eötvös arrivent aussi à cette conclusion, mais d'une manière assez détournée. Quant à moi, je crois qu'elle n'a pas besoin d'une démonstration spéciale, mais qu'elle découle directement des expressions données ci-dessus pour la vitesse maximum de la vibration, puisque l'intensité peut à chaque instant être regardée comme proportionnelle au carré de cette grandeur.

L'une et l'autre expression, celle de M. Ketteler et celle de M. Eötvös, satisfont, comme nous l'avons reconnu, au principe établi par ce dernier au sujet de l'influence du mouvement sur la force vive émise, et il est impossible de décider à priori laquelle des deux expressions est conforme à la verité. Il y a pourtant une circonstance qui plaide plus ou moins en faveur de l'opinion de M. Eötvös, c'est que l'expression adoptée par lui satisfait d'une manière rigoureusement exacte au principe de la force vive, tandis que cela n'a lieu que d'une manière approchée pour celle de M. Ketteler. C'est aussi par suite de cette circonstance que M. Eötvös arrive, en faisant usage de l'expression de M. Ketteler, à l'équation fausse (4); fausseté qui toutefois n'existe que lorsqu'on tient compte des puissances deuxième et suivantes de $\frac{g}{v}$, car les deux membres de cette équation ne diffèrent entre eux que d'une grandeur de l'ordre $\frac{g^2}{v^2}$. Si l'on veut regarder comme hors de

contestation le principe de la force vive, l'expression de M. Ketteler pour l'amplitude de la vibration n'est qu'une valeur approchée, obtenue en négligeant dans la valeur exacte de cette grandeur les puissances de $\frac{g}{v}$ et de $\frac{gt}{r}$ supérieures à la première. Les valeurs exactes, non approchées, de l'amplitude et de la vitesse de la vibration sont en conséquence, chez M. Eötvös, des fonctions de g, v et δ ou D plus simples que chez M. Ketteler. Or, bien que la simplicité ne soit pas le signe certain du vrai, elle donne pourtant, toutes choses égales d'ailleurs, une probabilité un peu plus grande.

Lorsqu'on néglige les puissances de $\frac{g}{v}$ et de $\frac{gt}{r}$ supérieures à la première, les formules (12) et (13) sont pour la vitesse et l'amplitude de la vibration les expressions les plus générales, satisfaisant au principe de la force vive, et affranchies de toute hypothèse autre que celle employée pour la formation des expressions (5) et (6), à savoir, que la vitesse de la vibration, en cas de mouvement de la source, est proportionnelle à cette même grandeur prise dans le cas où la source est en repos. La même chose peut être dite de l'expression (10) pour la fonction χ et de l'expression (11) pour S. La valeur de n, dans ces formules, est jusqu'ici entièrement indéterminée.

Peut-être l'observation donnerait-elle le moyen d'arriver à la certitude au sujet de la valeur de n. Provisoirement, toutefois, il ne me semble pas probable que des expériences spécialement entreprises dans ce but fourniraient beaucoup de lumière. Du moins, dans les phénomènes qui à ma connaissance pourraient servir à cet effet [1]), les différences d'intensité ou bien, comme pour la lumière et la chaleur, sont si petites qu'on réussirait à peine à les observer, bien loin de pouvoir les mesurer exactement, ou bien, comme pour le son, où leur grandeur serait suffisante, elles sont soumises à tant d'influences perturbatrices, que là non plus il n'y a pas à espérer de résultats exacts.

[1]) Ketteler, *l. c.*, p. 145; Eötvös, *l. c.*, p. 531 et suiv.

NOTICE

SUR LA

SOUSFAMILLE DES HOLACANTHIFORMES

ET DESCRIPTION DE

QUELQUES ESPÈCES INSUFFISAMMENT CONNUES,

PAR

P. BLEEKER.

La sousfamille des Holacanthiformes est nettement distinguée des autres Chétodontoïdes par la forte épine angulaire du préopercule, par des écailles cténoïdes dures à surface longitudinalement rugueuse, par la tête entièrement squammeuse, par des dents aux deux mâchoires plus ou moins tricuspides, par une dorsale indivisée à épines distantes et mobiles, par la membrane branchiale s'attachant à un isthme fort étroit, par une mâchoire inférieure à branches libres non réunies derrière la symphyse, et par l'absence d'écailles inguinales allongées ou composées.

Les cinquante espèces d'Holacanthiformes actuellement connues ont été réunies dans les deux genres Pomacanthus (= Chaetodon Art.) et Holacanthus Lac. Swainson en proposa bien un troisième sous le nom de Genicanthus, Kaup un quatrième qu'il nomma Centropyge, et M. Gill un cinquième sous le nom de Pomacanthodes, mais ces genres ne sont point admissibles. Le Genicanthus est établi sur l'Holacanthus Lamarckii, espèce assez voisine de l'espèce type Lacepédienne d'Holacanthus (Holacanthus tricolor Lac.). Le genre Centropyge ne repose que sur une variation individuelle à quatre

épines anales de l'Holacanthus tibicen CV. (= Holacanthus leucopleura Blkr); et le Pomacanthodes zonipectus Gill me paraît génériquement identique avec le Chaetodon Art. (nec Cuv.)

Je vois dans les Holacanthiformes quatre types que je crois de valeur générique et qui sont caractérisés principalement par la composition de la nageoire dorsale, par la forme du corps, par l'écaillure et par l'extension de la membrane branchiale.

Quelques espèces ont en commun une dorsale à partie épineuse beaucoup jusqu'à deux fois plus courte que la partie molle et composée de 8 jusqu'à 11 épines rapprochées et rapidement croissant en longueur. Elles ont toutes le corps rhomboïde, la dorsale et l'anale pointues ou prolongées, le préorbitaire sans dentelure, la membrane branchiale continue sous la gorge, et de 60 jusqu'à 90 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Je conserve à ce genre le nom de *Chaetodon* Art., l'espèce type Artédienne étant le Chaetodon paru Bl. ou le Pomacanthus paru Lac.

D'autres espèces présentent la combinaison des caractères d'un corps plus ou moins rhomboïde, d'une dorsale à partie épineuse un peu plus longue que la partie molle et soutenue par 12 à 14 épines rapidement croissant en arrière, d'un préorbitaire dentelé, d'une membrane branchiale continue sous la gorge et de 50 jusqu'à 90 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Je réunis ces espèces, au nombre de dix ou onze, sous le nom d'*Acanthochaetodon*. On pourrait en prendre pour type l'Holacanthus annularis Lac.

La plupart des espèces d'Holacanthiformes, celles qui sont génériquement identiques avec le Chaetodon tricolor Bl., type du genre *Holacanthus* et auquel doit être conservé le nom générique proposé par Lacepède, se distinguent des autres par les caractères combinés d'une dorsale à partie épineuse beaucoup jusqu'à plus de deux fois plus longue que la partie molle et armée de 13 à 15 épines distantes, de 50 à 70 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale et d'un corps plus ou moins ovalaire.

Le quatrième type enfin, pour lequel je propose le nom de

Chaetodontoplus comprend une demi-douzaine d'espèces, nettement distinctes par les caractères réunis d'un corps ovale, d'une dorsale à partie épineuse notablement plus longue que la partie molle et à 11 jusqu'à treize 13 épines dont les postérieures ne sont pas ou presque pas plus longues que les médianes, d'une dorsale molle, anale et caudale toujours obtuses et arrondies, d'une membrane branchiale non continue sous la gorge, et de 90 jusqu'à 140 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale.

La diagnose des quatre genres pourrait être formulée dans les termes suivants.

CHAETODON Art. (nec Cuv.) = Pomacanthus Lac. Cuv. = Pomacanthodes Gill?

Corpus rhomboideum. Pinna dorsalis parte spinosa parte radiosa multo ad duplo breviore spinis 8 ad 11 approximatis postrorsum valde accrescentibus, parte radiosa acuta. Os praeorbitale edentulum. Membrana branchialis sub gula continua. Caudalis convexa. Squamae trunco irregulariter seriatae, supra lineam lateralem in series 60 ad 90 transversas dispositae.

Spec. typ. *Chaetodon paru* Bl. = Pomacanthus paru Lac.

ACANTHOCHAETODON Blkr.

Corpus subrhomboideum. Pinna dorsalis parte spinosa parte radiosa paulo tantum longiore spinis 12 ad 14 postrorsum valde accrescentibus. Os praeorbitale denticulatum. Membrana branchialis sub gula continua. Caudalis obtusa. Squamae trunco irregulariter seriatae, supra lineam lateralem in series 50 ad 90 transversas dispositae.

Spec. typ. *Holacanthus annularis* Lac.

HOLACANTHUS Lac. = Genicanthus Swns. = Centropyge Kaup.

Corpus subrhomboideum vel ovale. Pinna dorsalis parte spinosa parte radiosa valde multo ad plus duplo longiore, spinis distantibus 13 ad 15. Os praeorbitale denticulatum. Membrana branchialis sub gula continua vel subcontinua. Squamae trunco

supra lineam lateralem in series 50 ad 55 (vel ad 70) transversas dispositae. Series squamarum lateribus longitudinales obliquae postrorsum adscendentes.

Spec. typ. *Holacanthus tricolor* Lac.

Chaetodontoplus Blkr.

Corpus ovale. Pinna dorsalis parte spinosa parte radiosa sat multo minus duplo longiore spinis distantibus 11 ad 13 posterioribus 5 vel pluribus subaequilongis, parte radiosa obtusa rotundata. Membrana branchialis sub gula non continua sat longe a linea mediana isthmo affixa. Squamae trunco irregulariter seriatae, supra lineam lateralem in series 90 ad 140 transversas dispositae. Caudalis convexa.

Spec. typ. *Holacanthus septentrionalis* Schl.

La liste suivante énumère les espèces actuellement connues. Y compris deux espèces fossiles, leur nombre va à une cinquantaine. Je n'en crois douteuses que trois ou quatre. Les Chaetodon paru et cingulatus pourraient bien être identiques avec le Chaetodon arcuatus L., et les Holacanthus mokhella et flavissimus ne sont pas assez connus pour qu'on puisse les admettre définitivement comme de bonnes espèces. J'y ai placé l'Holacanthus formosus Cast. à la suite des vrais Holacanthus, mais avec un point de doute, la figure montrant bien une dorsale épineuse du double plus longue que la partie molle, mais la description ne parlant que de 8 épines et par contre de 25 rayons à la dorsale. Si la description est exacte, le formosus serait plutôt un Chaetodon. Un examen nouveau sur nature est nécessaire pour bien déterminer les affinités de cette espèce. Une autre espèce américaine (des îles Galapagos), l'Holacanthus passer Val., paraît être un vrai Holacanthus, mais à écailles plus petites que les autres espèces connues. Si l'écaillure du passer a été exactement rendue sur la figure (Zool. Voy. Vénus Poiss. pl. 6), il y a aussi des espèces d'Holacanthus à environ 70 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale.

Espèces actuellement connues de la sousfamille des Holacanthiformes.

Chaetodon arcuatus L. = Pomacanthus arcuatus Lac = Pomacanthus quinquecinctus CV.
» paru Bl = Pomacanthus paru Lac. — an = arcuatus L.?
» cingulatus Blkr = Pomacanthus cingulatus CV. — an = arcuatus L. var.?
» aureus Bl. (nec Schl.) = Pomacanthus aureus et balteatus CV.
» subarcuatus Blkr = Pomacanthus subarcuatus Ag. (foss.).
» ?zonipectus Blkr = Pomacanthodes zonipectus Gill.

Acanthochaetodon asfur Blkr = Holacanthus asfur Lac. = Chaetodon asfur Forsk.
» maculosus Blkr = Chaetodon maculosus Forsk. = Holacanthus coerulescens et lineatus Rüpp. = Holacanthus haddaja CV.?
» mokhella Blkr = Holacanthus mokhella CV. — spec. incerta.
» alternans Blkr = Holacanthus alternans CV.
» chrysurus Blkr = Holacanthus chrysurus CV.
» striatus Blkr = Holacanthus striatus Rüpp. = Holacanthus coeruleus Ehr. CV.?
» semicirculatus Blkr = Holacanthus semicirculatus CV.
» nicobariensis Blkr = Chaetodon nicobariensis Bl. Schn. = Holacanthus geometricus Lac. = Holacanthus nicobariensis Blkr.
„ imperator Blkr = Chaetodon imperator Bl. = Holacanthus imperator Lac.
» annularis Blkr = Chaetodon annularis Bl. = Holac. annularis Lac. = Hol. pseudannularis Blkr = Chaetodon verticosus Gron.
» lepidolepis Blkr = Holacanthus lepidolepis Blkr = Holac. ignatius Playf. = Holac. poecilus Pet.

Holacanthus Lamarckii Lac. = Genicanthus Lamarckii Swns.
» melanospilus Blkr.
» tricolor Lac. = Chaetodon tricolor Bl.
» bicolor CV. = Chaetodon bicolor Bl.
» ciliaris Lac. = Chaetodon ciliaris Bl.
» caudavittatus Günth.
» passer Val.
» strigatus Gill.
» tibicen CV. = Holacanthus leucopleura Blkr = Centropyge tibicen Kp.
» arcuatus Gr.
» sextriatus K. V. H.
» diacanthus Günth. = Chaetodon diacanthus Bodd. = Chaet. fasciatus Bl. = Holacanthus dux Lac.
» navarchus CV.
» xanthometopon Blkr.
» trimaculatus Lac.
» microcephalus Ag. (foss.)
» xanthurus Benn.
» Vroliki Blkr.
» nox Blkr.
» bispinosus Günth. = Holacanthus diacanthus Blkr ol.
» multispinis Plfr.
» cyanotis Günth. = Holacanthus monophthalmus Kner = Holacanthus uniocellatus Kner.
» flavissimus CV.
» loriculus Günth.
» luteolus CV.
» ocularis Pet.
» ? formosus Cast.

Chaetodontoplus mesoleucus Blkr = Chaetodon mesoleucus Bl. = Holacanthus mesoleucus Lac.
» Duboulayi Blkr = Holacanthus Duboulayi Günth.
» chrysocephalus Blkr = Holacanthus chrysocephalus Blkr.
» melanosoma Blkr = Holacanthus melanosoma Blkr.

Chaetodontoplus dimidiatus Blkr = Holacanthus dimidiatus Blkr.
» septentrionalis Blkr = Holacanthus septentrionalis Schl.

Les espèces actuellement vivantes sont propres aux mers intertropicales. Les Chaetodon habitent les côtes Atlantiques de l'Amérique, et si le Pomacanthodes zonipectus Gill est du même genre il s'en trouve aussi une espèce sur les côtes Pacifiques du Nouveau-monde.

Les Acanthochaetodon n'habitent que le bassin Indo-Pacifique, où ils s'étendent depuis la côte Africaine jusqu'aux Archipels orientaux de la Polynésie.

Les Chaetodontoplus n'ont été trouvés jusqu'ici que dans l'Inde archipélagique et les mers limitrophes de la Nouvelle-Hollande et du Japon.

Les Holacanthus proprement dits ont un cercle de distribution beaucoup plus large, et bien que la plupart soient dispersés dans le bassin Indo-Pacifique depuis l'Afrique jusqu'à l'Amérique, il s'en trouve aussi deux ou trois espèces sur les côtes Atlantiques du Nouveau-monde.

L'Insulinde seule nourrit au moins 22 espèces, dont 6 d'Acanthochaetodon, 12 d'Holacanthus et 4 de Chaetodontoplus. Une révision et les figures de ces espèces sont destinées à être incorporées dans l'Atlas ichthyologique des Indes orientales néerlandaises. Je me borne, dans cette notice, à donner un exposé diagnostique des espèces connues d'Acanthochaetodon et de Chaetodontoplus et la description de quelques espèces insuffisamment connues.

ACANTHOCHAETODON Blkr.

I. Douze épines dorsales. Dorsale molle aiguisée en pointe ou prolongée en filet. Milieu du tronc à bande transversale jaunâtre. Caudale jaune sans taches ni bandes.

A. Environ 50 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Anale prolongée en pointe déliée. Corps noirâtre. Pectorale atteignant la bande jaune du tronc.

1. *Acanthochaetodon asfur* Blkr = Holacanthus asfur Cuv.

B. 70 à 75 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Anale à angle arrondi. Corps orange ou brun-orange. Pectorale n'atteignant pas la bande jaune du tronc. Partie postérieure du tronc à bandelettes transversales bleuâtres.

2. *Acanthochaetodon maculosus* Blkr = Holacanthus maculosus CV.

C. Ecailles? Bandelettes de la partie postérieure du tronc contournées en spirale.

3. *Acanthochaetodon mokhella* Blkr = Hol. mokhella CV. esp. dout.

II. Treize ou quatorze épines dorsales. Point de large bande dorso-anale jaune. 70 jusqu'à 90 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale.

A. Anale à angle pointu. 13 épines dorsales. Environ 80 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Ecailles du tronc squammuleuses. Tronc sans bandes ni bandelettes mais à petites taches inégales bleu-violet. Nageoires verticales à gouttelettes bleues.

4. *Acanthochaetodon lepidolepis* Blkr = Holac. lepidolepis Blkr.

B. Anale à angle arrondi. Corps à bandelettes transversales ou longitudinales.

a. Corps à bandelettes transversales courbées nacrées ou bleuâtres alternativement grêles et plus larges.

aa. Corps brun ou brun-orange. 13 épines dorsales. Bandelettes du tronc semilunaires.

† Environ 85 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Corps à nombreuses taches ou gouttelettes brunes. Caudale à bandelettes transversales nacrées ou bleuâtres. D. 13/21. A. 3/21.

5. *Acanthochaetodon alternans* Blkr = Holac. alternans CV.

†' Ecailles? Corps sans taches. Caudale jaune. D. 13/19. A. 3/19.

6. *Acanthochaetodon chrysurus* Blkr = Holac. chrysurus CV.

bb. Corps bleu-violet ou noir-violet sans taches. Anale obtuse.
† Bandelettes du corps peu courbées. 13 épines dorsales. Environ 80 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Bandelette impaire rostro-nuchale.

7. *Acanthochaetodon striatus* Blkr = Holac. striatus Rüpp.

†'. Bandelettes du corps fortement courbées.
♂. Environ 75 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Epines dorsales postérieures notablement plus longues que les médianes. Bandelettes du tronc semilunaires. Bandelette impaire rostro-nuchale. 14 (très-rarement 13) épines dorsales.

8. *Acanthochaetodon semicirculatus* Blkr = Hol. semicirculatus CV.

♂'. Environ 90 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Epines dorsales postérieures presque pas plus longues que les épines médianes. Bandelettes du tronc presque circulaires. Front et vertex à bandelettes transversales. 14 épines dorsales.

9. *Acanthochaetodon nicobariensis* Blkr = Hol. nicobariensis Blkr.

b. Corps à bandelettes longitudinales montant obliquement en arrière. Environ 90 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Dorsale molle pointue ou prolongée, anale obtuse.
aa. 14 (très-rarement 13) épines dorsales. Bandelettes obliques du tronc nombreuses (15 à 25). Région sur-scapulo-axillaire à large bande transversale noirâtre.

10. *Acanthochaetodon imperator* Blkr = Hol. imperator Lac.

bb. 13 épines dorsales. Bandelettes obliques du tronc peu nombreuses (6). Région posttemporale à anneau bleu.

11. *Acanthochaetodon annularis* Blkr = Hol. annularis Lac.

CHAETODONTOPLUS Blkr.

I. Onze épines dorsales. Ecaillure? Partie antérieure du corps jaunâtre, partie postérieure brune ou noirâtre. Bande oculaire. Bande cunéiforme jaune sous la partie postérieure de la dorsale. Caudale jaune. D. 11/23. A. 3/20.

1. *Chaetodontoplus Duboulayi* Blkr = Holac. Duboulayi Günth.

II. Douze ou treize épines dorsales.

A. 85 à 90 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Ecailles du tronc squammuleuses. 12 (très-rarement 13) épines dorsales, les médianes plus longues que les suivantes. Dorsale molle 1¼ fois dans la dorsale épineuse. Bande oculaire. Corps jaunâtre en avant, noirâtre en arrière, vermiculé longitudinalement de nacré ou de bleuâtre.

2. *Chaetodontoplus mesoleucus* Blkr = Chaetodon mesoleucus Bl.

B. Plus de 100 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Ecailles du tronc non squammuleuses. 13 épines dorsales. Point de bande oculaire.

a. Environ 125 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Corps sans bandes longitudinales bleues.

aa. Dorsale molle environ 1⅓ fois dans la dorsale épineuse. Epines dorsales médianes pas plus longues que les suivantes. Tête orange et tronc brun-violet à rivules longitudinales bleuatres. Caudale sans bande. P. 2/17.

3. *Chaetodontoplus chrysocephalus* Blkr = Holac. chrysocephalus Blkr.

bb. Dorsale molle environ 1½ fois dans la dorsale épineuse. P. 2/14 ou 2/15.

† Epines médianes de la dorsale pas plus longues que les suivantes. Corps noirâtre. Caudale à large bande médiane transversale noire.

4. *Chaetodontoplus melanosoma* Blkr = Holac. melanosoma Blkr.

† Epines dorsales médianes un peu plus longues que les suivantes. Moitié supérieure du corps rose-violet ou grisâtre,

moitié inférieure noire, les couleurs nettement tranchées. Caudale sans bande.

5. *Chaetodontoplus dimidiatus* Blkr = Holac. dimidiatus Blkr.

b. Environ 140 rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale. Dorsale molle environ 1½ fois dans la dorsale épineuse. Corps orange à 10 ou 11 bandelettes longitudinales bleues. P. 2/16.

6. *Chaetodontoplus septentrionalis* Blkr = Holac. septentrionalis Schl.

Acanthochaetodon alternans Blkr. Fig. Planche II.

Acanthochaet. corpore subrhomboideo, altitudine spinam ventralem inter et spinam dorsi anteriorem (diametro dorso-ventrali) 2¼ circ. in ejus longitudine, latitudine 3 circ. in diametro dorso-ventrali; capite obtuso 4½ circ. in longitudine corporis; linea rostro-frontali rectiuscula; oculis diametro 3 circ. in longitudine capitis, diametro 1 circ. distantibus; osse praeorbitali oculi diametro non humiliore vix denticulato; dentibus vomerinis sat conspicuis; praeoperculo postice et inferne leviter denticulato, angulo spina oculo non vel vix breviore; suboperculo interoperculoque edentulis; squamis capite minimis oculo nudo vix distinguendis, trunco basi plus minusve squamulatis; seriebus squamarum trunco longitudinalibus irregularibus, transversis parum regularibus; squamis trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 85 circ., infra lineam lateralem in series 75 circ. transversas dispositis; squamis 62 circ. in serie horizontali os scapulare inter et basin pinnae caudalis quarum 28 circ. in dimidio trunci anteriore; squamis serie transversa 50 circ. spinam ventralem inter et spinam dorsi 1^{m} et spinam analem 1^{m} inter et lineam dorsalem, 12 circ. initium lineae lateralis inter et spinam dorsi 1^{m}; linea laterali bene conspicua; pinna dorsali parte spinosa parte radiosa paulo tantum lon-

giore spinis postrorsum longitudine sensim accrescentibus posteriore capite absque rostro non breviore; dorsali parte radiosa parte spinosa multo altiore absque parte producta vix vel non longiore quam alta, acuta, radiis 5° 6° et 7° plus minusve productis; pectoralibus acute rotundatis capite paulo longioribus; ventralibus acutis radio 1° plus minusve producto capite longiore spina valida capite absque rostro longiore; anali spina 3ª capite absque rostro non vel vix breviore, parte radiosa dorsali radiosa non breviore sed humiliore angulata angulo rotundata radiis 4° et 5° ceteris longioribus; caudali convexa capite non vel vix breviore; colore corpore fuscescente-aurantiaco; iride rosea vel aurantiaca; vittis corpore margaritaceis vel luteis transversis; vitta anteriore nucho-praeoperculo-ventrali; vitta 2ª curvata dorso-humero-ventrali diffusa dorso antice incipiente et post basin ventralis desinente; vittis 7 sequentibus valde conspicuis utrinque fusco limbatis curvatis convexitate antrorsum spectantibus latioribus et gracilioribus alternantibus subaequidistantibus anteriore spinam dorsi 7ᵐ inter et anum, sequente spinam dorsi 10ᵐ inter et spinam analem 1ᵐ, ceteris dorso-analibus dorsalem et analem intrantibus; cauda vittula ejusdem coloris transversa mox ante basin pinnae caudalis; dorso antice et medio et lateribus vittas transversas inter maculis parvis vel guttulis sat numerosis sparsis fuscis; pinnis, pectoralibus aurantiacis, ceteris aurantiaco-fuscis vel fuscis, caudali dimidio basali vittulis 2 vel 3 transversis margaritaceis.

B. 6. D. 13/22. P. 2/18. V. 1/5. A. 3/21. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Holacanthus alternans* CV., Poiss. VII p. 144; Günth., Cat. Fish. II p. 53; an et Playf., Fish. Zanzib. p. 38?

Hab. Madagascar, in mari.

Longitudo speciminis descripti 155‴.

Rem. Je ne vois sur l'individu décrit, ni la bandelette rostro-nuchale médiane, ni les bandelettes transversales de la moitié antérieure de la tête dont parle la description Cuviérienne, bandelettes qui n'existent problablement que dans les individus d'un âge moins avancé. M. Playfair dit que les bandelettes du tronc

disparaissent complètement dans les adultes (individus de 10½ pouces de long), mais l'identité spécifique des individus âgés avec l'alternans me paraît avoir besoin d'être constatée.

L'alternans est fort-voisin du semicirculatus. Les bandelettes transversales du tronc y sont disposées de la même manière et en même nombre, mais leur courbure, surtout celle des postérieures, dans l'alternans, est beaucoup moindre. La couleur du corps, dans le semicirculatus, est beaucoup plus foncée et violâtre et on n'y voit jamais de taches ou gouttelettes brunes. L'alternans est cependant plus essentiellement distinct du semicirculatus par l'écaillure, les rangées d'écailles dans cette dernière espèce étant moins nombreuses. Je trouve encore, dans le semicirculatus, la dorsale et l'anale beaucoup plus obtuses et l'épine préoperculaire notablement plus courte, mais ces différences peuvent dépendre de l'âge, le plus grand de mes individus du semicirculatus ne mesurant en longueur que 120‴.

C'est à l'alternans que mérite d'être plus spécialement comparé l'Holacanthus chrysurus CV., espèce insuffisamment connue et qu'on pourrait supposer une variété de l'alternans, si la description ne parlait pas d'une caudale entièrement jaune et de 19 rayons seulement à la dorsale et à l'anale.

Acanthochaetodon asfur Blkr.

Acanthochaet. corpore subrhomboideo, diametro dorso-ventrali 2 et paulo ad $2\frac{1}{6}$ in ejus longitudine; latitudine corporis 3 ad 3 et paulo in diametro dorso-ventrali; capite obtuso 4¼ ad 5 fere in longitudine corporis; linea rostro-frontali rectiuscula; oculis diametro 3 et paulo ad 3½ in longitudine capitis, diametro 1 circ. distantibus; osse praeorbitali oculi diametro non ad conspicue altiore, leviter ad conspicue denticulato; dentibus vomerinis sat conspicuis; praeoperculo postice leviter denticulato, inferne conspicue serrato, angulo spina oculo longiore; suboperculo leviter denticulato; interoperculo edentulo; squamis

capite oculo non armato bene distinguendis, trunco antice superne praesertim inaequalibus ex parte squamulatis; seriebus squamarum trunco transversis sat regularibus, longitudinalibus sat irregularibus supra lineam lateralem lineae dorsali subparallelis lateribus medio et superne obliquis postrorsum adscendentibus lateribus inferne subhorizontalibus; squamis trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 50 circ., infra lineam lateralem in series 48 circ. transversas dispositis; squamis 43 circ. in serie horizontali os scapulare inter et basin pinnae caudalis quarum 20 circ. in dimidio trunci anteriore; squamis serie transversa 28 ad 30 circ. spinam ventralem inter et spinam dorsi 1^m et spinam analem 1^m inter et lineam dorsalem, 6 vel 7 initium lineae lateralis inter et spinam dorsi 1^m; linea laterali valde conspicua tubulis bifidis vel trifidis notata; pinna dorsali parte spinosa parte radiosa paulo tantum longiore spina postica capite absque rostro non breviore; dorsali radiosa dorsali spinosa multo altiore, multo altiore quam longa, valde acuta, radiis 4° 5° et 6° juxtapositione unitis valde productis caudalem multo superantibus; pectoralibus acutis vel acute rotundatis capite non vel vix brevioribus; ventralibus acutis radio 1° plus minusve producto capite longiore, spina mediocri capite absque rostro longiore; anali spina 3^a capite absque rostro non vel vix breviore, parte radiosa forma, longitudine et altitudine dorsali radiosae subaequali; caudali convexa capite breviore; colore capite violascente-fusco vel aurantiaco-fusco, trunco violascente-nigro vel nigro; iride violascente-viridi margine pupillari aurea; fascia lateribus lata transversa parum curvata flava vel aurantiaca superne et medio quam inferne latiore, ab apice spinarum dorsi 6 ad 9 posteriorum vel subposteriorum descendente sub pectoralis dimidio posteriore decurrente et lateribus inferne supra anum desinente; pinnis, dorsali, anali et ventralibus fusco-violaceis vel nigricantibus, pectoralibus violascentibus vel aurantiaceis; cauda postice et pinna caudali flavis.

B. 6. D. 12/20 vel 12/21. P. 2/14 vel 2/15. V. 1/5. A. 3/19 vel 3/20. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Chaetodon asfur* Forsk., Descr. anim. p. 61 n. 84 (nec var.); L. Gm., Syst. nat. ed. 13ª p. 1267; Bl. Schn., Syst. p. 219.
Pomacanthus asfur Lac., Poiss. IV p. 518, 522, 524.
Holacanthus asfur Cuv., Règn. an. ed. 1ª II p. 336; Rüpp., Atl. R. N. Afr. Fisch. M. p. 132 tab. 34 fig. 2; CV., Poiss. VII p. 130; Günth., Cat. Fish. II p. 45; Klunz., Syn. Fisch. R. M. Verh. z. b. Ges. Wien XX p. 750 var. *d.* tant.

Hab. Mare rubrum.

Longitudo 2 speciminum 140‴ et 180‴.

Rem. L'asfur est une espèce éminemment distincte par le nombre d'environ 50 rangées transversales d'écailles au-dessus et au-dessous de la ligne latérale, par les 12 épines de la dorsale et par le prolongement en pointe déliée de l'anale. Sa diagnose est facilitée encore par la couleur noire ou noir-violet du corps, par la large bande jaunâtre passant sous la moitié postérieure de la pectorale et par l'absence de bandelettes nacrées ou bleuâtres tant sur le corps que sur les nageoires.

Bien que les vrais caractères ne furent pas suffisamment signalés, l'espèce fut bien reconnue par Forskaol, Rüppell, Cuvier et Valenciennes et par M. Günther. Depuis, cependant, M. Klunzinger, dans son Synopsis der Fische des Rothen Meeres, a cru devoir réunir, avec l'asfur, plusieurs espèces. Il ne voit dans l'Holacanthus striatus Rüpp., l'Holacanthus lineatus Rüpp. et l'Holacanthus coerulescens Rüpp. que des variétés de l'asfur, et il réunit même avec l'Holacanthus striatus Rüpp. l'Holacanthus chrysurus CV., ainsi que les espèces décrites sous les noms d'Holacanthus semicirculatus et d'Holacanthus nicobariensis, qui sont bien distinctes du striatus et bien valides.

Toutes ces formes cependant sont fort distinctes de l'asfur et présentent le caractère essentiel d'une formule d'écaillure fort différente. Dans aucune le nombre des rangées transversales d'écailles au-dessus de la ligne latérale ne reste au-dessous de

70 [1]) et dans quelques unes il monte même à plus de 80 jusqu'à 90.

J'ai devant moi des individus de l'asfur, du maculosus, du semicirculatus et du nicobariensis de même taille, et qui prouvent que les différences existant par rapport à l'écaillure, à la forme des nageoires et aux détails du système de coloration, ne sont nullement attribuables à des différences d'âge.

Les Acanthochaetodon striatus, semicirculatus et nicobariensis, outre qu'ils ont les écailles beaucoup plus petites que l'asfur, 13 à 14 épines dorsales et les nageoires dorsale et anale beaucoup plus obtuses et non prolongées en pointe déliée, ne présentent jamais la large bande dorso-ventrale jaune qui fait si aisément reconnaître l'asfur. On ne retrouve une telle bande parmi les Acanthochaetodon (les Holacanthus passer, tibicen (= leucopleura) et strigatus sont des Holacanthus proprement dits) que dans l'Holacanthus maculosus CV., espèce dont la description va suivre; mais dans le maculosus, différent au reste sous plusieurs autres rapports, cette bande est plus grêle, placée plus en arrière, descend, non des épines dorsales mais de la pointe et du bord antérieur de la dorsale molle, et passe en arrière de la pointe de la pectorale. Il ne peut donc pas être question non plus de l'identité spécifique de l'asfur et du maculosus. Les figures publiées par Rüppell, l'une sous le nom de lineatus (synonyme du maculosus), rendent parfaitement les caractères saillants des deux espèces.

Acanthochaetodon maculosus Blkr.

Acanthochaet. corpore subrhomboideo, diametro dorso-ventrali 2 et paulo ad $2\frac{1}{5}$ in ejus longitudine, latitudine 3 circ. in diametro

[1]) La formule des écailles de l'Holacanthus chrysurus CV. n'est pas connue, mais il est dit expressément de cette espèce, que ses écailles sont plus petites que celles de l'Holacanthus diacanthus (Hol. dux Lac.) où les rangées transversales au-dessus de la ligne latérale ne sont qu'au nombre de 50.

dorso-ventrali; capite obtuso 4 et paulo ad 4⅔ in longitudine corporis; linea rostro-frontali rectiuscula; oculis diametro 3 et paulo ad 4 in longitudine capitis, diametro 1 circ. distantibus; osse praeorbitali oculi diametro non ad paulo altiore, leviter denticulato; dentibus vomerinis sat conspícuis; praeoperculo postice et inferne leviter denticulato, angulo spina oculi diametro non longiore; suboperculo et interoperculo vix vel non denticulatis; squamis capite minimis opercularibus aliquot majoribus exceptis oculo nudo vix distinguendis, trunco antice superne praesertim inaequalibus ex parte squamulatis; seriebus squamarum trunco transversis et longitudinalibus sat irregularibus; squamis trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 70 ad 75, infra lineam lateralem in series 68 ad 70 transversas dispositis; squamis 60 circ. in serie horizontali os scapulare inter et basin pinnae caudalis quarum 28 circ. in dimidio trunci anteriore; squamis serie transversa 40 circ. spinam ventralem inter et spinam dorsi 1m et spinam analem 1m inter et lineam dorsalem, 9 circ. initium lineae lateralis inter et spinam dorsi 1m; linea laterali bene conspicua tubulis bifidis notata; pinna dorsali parte spinosa parte radiosa paulo longiore spina postica capite absque rostro non breviore; dorsali radiosa dorsali spinosa multo altiore, multo altiore quam longa, valde acuta, radiis 3° 4° et 5° juxtapositione unitis valde productis apicem caudalis non vel vix superantibus; pectoralibus acutis vel acute rotundatis capite paulo brevïoribus; ventralibus acutis radio 1° plus minusve producto capite longiore, spina mediocri capite absque rostro longiore; anali spina 3a capite absque rostro longiore, parte radiosa dorsali radiosa non breviore sed humiliore angulata angulo rotundata radiis productis nullis 5° et 6° ceteris longioribus; caudali convexa capite breviore; colore corpore profunde aurantiaco vel aurantiaco-fusco; iride viridescente margine pupillari aurea; squamis operculo et trunco antice majoribus pluribus macula transversa oblonga vel semilunari nigra vel profunde violascente-coerulea; fascia transversa flava curvata convexitate antrorsum spectante medio quam superne et inferne latiore ab apice et parte

anteriore dorsalis radiosae descendente post apicem pinnae pectoralis decurrente et latere inferne vel basi analis radiosae desinente; trunco postice junioribus vittulis pluribus transversis curvatis subparallelis coeruleis dorsalem et analem intrantibus ibique ex parte in guttulas decompositis; pinnis dorsali, anali et ventralibus fuscis vel aurantiaco-fuscis, pectoralibus dilute violascentibus vel aurantiacis, caudali flava, dorsali et anali coeruleo marginatis.

B. 6. D. 12/20 ad 12/22. P. 2/17. V. 1/5. A. 3/18 vel 3/19. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Chaetodon maculosus* Forsk., Descr. anim. p. 62 N°. 85; L. Gm., Syst. nat. ed. 13ª p. 1267; Bl. Schn., Syst. p. 220.
Chaetodon asfur var. *coerulescens* Forsk., Descr. anim. p. 61 ??
Chaetodon arusa Bonn., Ichthyol. p. 88.
Holacanthus aruset Lac., Poiss. IV p. 528, 535, 537.
Holacanthus coerulescens Rüpp., Atl. Reis. N. Afr. Fisch. R. M. p. 133.
Holacanthus lineatus Rüpp., Ibid. p. 133; N. Wirbelth. Fisch. p. 32 tab. 10 fig. 1.
Holacanthus maculosus CV., Poiss. VII p. 132; Günth., Cat. Fish. II p. 45.
Holacanthus haddaja CV., Poiss. VII p. 131. var.??
Holacanthus asfur b. var. c. Klunz., Syn. Fisch. R. M., Verh. z. b. Ges. Wien. XX p. 790.

Hab. Mare rubrum.

Longitudo 3 speciminum 119‴, 135‴ et 158‴.

Rem. Le maculosus, comme je l'ai déjà dit, est bien distinct de l'asfur par la formule de l'écaillure et par la position de la bande transversale jaune, mais on le reconnaît encore à son anale non prolongée en pointe aiguë, à la couleur brun-orange du corps et aux traits bleuâtres et verticaux de la moitié postérieure du tronc et des nageoires dorsale et anale. J'y compte aussi 2 ou 3 rayons de plus à la pectorale que dans l'asfur. Je ne vois plus, sur les individus décrits, des traits bleuâtres, qui n'existent probablement que dans les jeunes.

Il reste incertain si le Chaetodon asfur var. coerulescens de Forskaol, est de l'espèce actuelle. Les phrases: „coerulescens, lituris et fasciis obliquis, lineolis violaceis" ne sont pas de nature à faire reconnaître le maculosus. C'est plutôt l'espèce décrite sous le nom d'Holacanthus mokhella Ehr. (CV., Poiss. VII p. 133), espèce encore douteuse, qui combine, avec la couleur du fond et avec la direction des bandelettes bleuâtres ou nacrées du semicirculatus ou du nicobariensis, une bande jaune descendant de la pointe de la dorsale jusqu'à moitié du corps, et qui est dite en outre avoir la dorsale à pointe aiguë et le bout de la queue et la caudale jaunes. On ne connaît au-reste ni l'écaillure ni la formule des nageoires du mokhella, ni la taille de l'individu ou des individus qui ont servi à la description.

Chaetodontoplus septentrionalis Blkr.

Chaetodontopl. corpore ovali, diametro dorso-ventrali $2\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{4}$ in ejus longitudine; latitudine corporis 3 fere in diametro dorsoventrali; capite valde obtuso 5 circ. in longitudine corporis; linea rostro-frontali rectiuscula; oculis diametro $3\frac{1}{4}$ circ. in longitudine capitis, plus diametro 1 distantibus; osse praeorbitali oculi diametro non vel vix humiliore vix denticulato; dentibus vomerinis parum conspicuis; praeoperculo postice denticulato inferne edentulo, angulo spina oculo non breviore; suboperculo et interoperculo margine libero scabriusculis; squamis capite minimis oculo nudo vix distinguendis, trunco non squamulatis; seriebus squamarum trunco longitudinalibus et transversis sat irregularibus; squamis trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 140 circ., infra lineam lateralem in series 135 circiter transversas dispositis; squamis 120 circ. in serie horizontali os scapulare inter et basin pinnae caudalis quarum 60 circ. in dimidio trunci anteriore; squamis serie transversa 85 circ. spinam ventralem inter et spinam dorsi anteriorem, 25 circ. initium lineae lateralis inter et spinam dorsi 1^{m}; linea laterali trunco antice

bene conspicua poris distantibus notata, trunco postice caudaque vix conspicua; pinna dorsali spinosa spinis postrorsum parum accrescentibus posterioribus subaequilongis capite absque rostro brevioribus; dorsali radiosa longitudine 1½ circ. in longitudine dorsalis spinosae eaque paulo altiore obtuse rotundata; pectoralibus obtusiuscule rotundatis capite paulo brevioribus; ventralibus acutis radio 1° plus minusve producto capite longiore spina valida capite absque rostro non longiore; anali spina posteriore capite absque rostro breviore, parte radiosa dorsali radiosa non breviore sed paulo humiliore, obtuse rotundata; caudali convexa capite paulo breviore; colore corpore pinnisque dorsali et anali aurantiaco-rubro; iride coerulescente margine orbitali fusca margine pupillari aurea; vittis imparibus coeruleis linea mediana rostro-frontali et gulo-ventrali; vittis coeruleis violascente vel nigricante limbatis, capite irregulariter undulatis ex parte confluentibus, trunco longitudinalibus 10 vel 11 plus minusve obliquis et undulatis subaequidistantibus, superioribus pinnam dorsalem intrantibus, mediis basin pinnae caudalis attingentibus, inferioribus pinnam analem intrantibus; pinnis dorsali et anali violascente vel nigricante marginatis vittis longitudinalibus 2 ad 5 coeruleis ex parte confluentibus; pinnis pectoralibus, ventralibus caudalique pulchre aurantiacis, pectoralibus basi macula magna rotunda fusca coeruleo annulata, caudali postice fusco leviter marginata.

B. 6. D. 13/19. P. 2/16. V. 1/5. A. 3/18. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Holacanthus septentrionalis* Schl., Faun. Jap. Poiss. p. 82 tab. 44 fig. 2; Blkr, Act. Soc. Sc. Ind. Neerl. VII. Zesde bijdr. vischf. Japan p. 78; Günth., Cat. Fish. II p. 52. (nec Rich. Icon Reev.?)

Hab. Kiusiu (Nagasaki); in mari.

Longitudo speciminis descripti 177.

Rem. Le Chaetodontoplus septentrionalis est éminemment caractérisé par les écailles, qui sont plus nombreuses que dans aucune des autres espèces du genre, et par les bandelettes bleues longitudinales du tronc et des nageoires dorsale et anale.

L'espèce n'est positivement connue que du Japon. Richardson la cite bien aussi de Chine, d'après un dessin de Reeves, mais il se pourrait que ce dessin ne représentât qu'un Acanthochaetodon annularis, espèce qui offre un système de coloration du tronc analogue, et où la région suroperculaire porte un anneau bleu, dont Richardson parle dans sa description (Rep. ichth. Chin. in Rep. 15h meet. Brit. Assoc. p. 246), mais qui n'existe pas dans le septentrionalis. Si cette supposition venait à se vérifier, l'espèce actuelle devrait être rayée des Catalogues des poissons de Chine et y être remplacée par l'annularis.

La Haye, Février 1876.

NOTICE

SUR LES

ESPÈCES NOMINALES DE

POMACENTROÏDES

DE L'INDE ARCHIPÉLAGIQUE,

PAR

P. BLEEKER.

La révision de plus de deux mille individus de Pomacentroïdes de l'Inde archipélagique, qui font partie de mes collections, m'a fait mieux connaître les nombreuses espèces de ces parages. Je suis à même maintenant de les mieux définir et d'en dresser plus exactement la synonymie. Beaucoup d'espèces, estimées inédites par les auteurs, y compris moi-même, étant prouvées n'être que nominales, doivent être supprimées et ne pourront figurer désormais dans la science que comme de simples synonymes.

L'erreur d'avoir confondu tant d'espèces était difficile à éviter. Tant qu'on ne peut étudier d'une espèce donnée qu'un seul ou que quelques individus, qui ne représentent qu'un même âge ou un même sexe, il doit arriver, vu les grandes différences qui s'observent souvent entre les jeunes et les adultes, les mâles et les femelles, qu'on croie avoir affaire à des espèces là où il n'y a que des différences individuelles, d'âge ou de sexe.

Heureusement les méprises de cette sorte, tout inévitables qu'elles soient, ne nuisent pas à la science. C'est aux recherches ultérieures à les corriger et à démontrer le plus ou moins de valeur des espèces censées inédites. Les doubles emplois, dont, par exemple, fourmille encore la grande Histoire naturelle des Poissons, auront toujours le mérite d'avoir fixé l'attention sur les formes et les

couleurs différentes sous lesquelles se présente une même espèce, et la science en a plus profité que de l'entassement souvent peu fondé de synonymes, en usage parmi les ichthyologistes des époques antérieures.

Je n'indique ici que les espèces dont il est fait double emploi par les ichthyologistes modernes. Les synonymes ajoutés, s'ils sont justes, ce dont je ne doute point, prouvent que quelques espèces ont même été quadruplées, quintuplées et sextuplées.

Prochilus ephippium Blkr = Amphiprion ephippium Bl. Schn. = Amphiprion tricolor Günth.

» polymnus Blkr = Amphiprion polymnus Bl. Schn. = Amph. xanthurus, chrysopterus, Clarkii CV. = Amph. boholensis Cart.

» bifasciatus Blkr = Amphiprion bifasciatus Bl. Schn. = Amph. laticlavius, trifasciatus CV. = Amph. intermedius Schl. Müll.

» percula Blkr = Amphiprion percula, tunicatus, ocellatus, melanurus CV.

Pomacentrus (Pomacentrus) pavo Lac. = Pomacentrus pavoninus Blkr.

» (») taeniurus Blkr = Glyphisodon amboinensis.

» (Pseudopomacentrus) littoralis Blkr = Pomacentrus littoralis K. V. H. = Pom. hogoleuensis Hombr. Jacq.

» (») trilineatus Blkr = Pomacentrus trilineatus Ehr. = Pom. tripunctatus, emarginatus, vanicolensis, chrysurus CV. = Pristotis fuscus Blkr = Pom. katunko, bankanensis, taeniomometopon, simsiang Blkr = Pom. punctato-lineatus Cart.

Parapomacentrus Bankieri Blkr = Glyphisodon Bankieri Rich. = Glyphisodon nemurus Blkr.

Amblypomacentrus breviceps Blkr. = Glyphisodon breviceps Schl. Müll. = Pristotis trifasciatus et Pomacentrus nematopterus Blkr.

Eupomacentrus (Eupomacentrus) lividus Blkr = Pomacentrus scolopseus punctatus QG. = Pom. pristiger, taeniops CV. = Pom. prosoptotaenioides et cyanospilos Blkr.

» (Brachypomacentrus) albifasciatus Blkr = Pomacentrus albifasciatus Schleg. Müll. = Pomac. leucopleura Blkr.

Dischistodus trimaculatus Blkr = Pomacentrus trimaculatus, perspicillatus CV.

» prosopotaenia Blkr = Pomacentrus prosopotaenia Blkr = Pom. interorbitalis Günth.

» notophthalmus Blkr = Pomacentrus notophthalmus, melanotus Blkr = Pom. Montrouzieri Thioll.

» chrysopoëcilus Blkr = Pomacentrus chrysopoëcilus K. V. H. = Pom. notostigmus Rich.

» annulatus Blkr = Pomacentrus annulatus Pet. = Glyphidodon Westermani Blkr.

Glyphidodon (Glyphidodon) bengalensis CV. = Glyph. affinis Günth.

» (») coelestinus CV. = Glyph. waigiensis QG. = Glyph. rahti CV. = Glyph. quadrifasciatus Blkr.

» (Amblyglyphidodon) trifasciatus Blkr = Glyphisodon curassao CV. = Glyph. trifasciatus Blkr = Glyph. smaragdinus Brev.

» (») ternatensis Blkr = Glyph. ternatensis, Schlegeli Blkr.

» (Stegastes) lacrymatus Blkr = Glyph. lacrymatus QG. = Glyph. nivosus Hombr. Jacq.

» (») leucozona Blkr = Glyph. leucozona Blkr = Glyph. florulentus Günth. = Glyph. cingulum Klunz.

» (») Dickii Blkr = Glyph. Dickii Lién. = Glyph. unifasciatus Kner Stnd.

Paraglyphidodon melas Blkr = Glyphidodon melas K. V. H. = Glyph. ater Ehr.

Glyphidodontops modestus Blkr = Glyphidodon modestus Schl. Müll. = Glyph. phaiosoma Blkr.
» uniocellatus Blkr = Glyphisodon uniocellatus QG. = Glyph. assimilis Günth.
» antjerius Blkr = Glyphisodon antjerius K. V. H. = Glyph. biocellatus, Brownriggii CV.
» albofasciatus Blkr = Glyphisodon albofasciatus Hombr. Jacq. = Glyph. xanthozona Blkr = Glyph. taenioruptus Cart.
» zonatus Blkr = Glyphisodon zonatus CV. = Glyph. Rossii Blkr = Glyphidodon cingulatus, albocinctus Kner.
» unimaculatus Blkr = Glyphisodon unimaculatus CV. = Glyph. balinensis Blkr = Glyph. dispar Günth.

Tetradrachmum trimaculatum Blkr = Dascyllus trimaculatus CV. = Dascyllus niger Blkr.
» reticulatum Blkr = Heliases reticulatus Rich. = Dascyllus xanthosoma Blkr.

Chromis cinerascens Blkr = Heliases cinerascens CV. = Glyphisodon angulutus Blkr.
» analis Blkr = Heliases analis CV. = Helias. macrochir Blkr.
» lepisurus Blkr = Heliases lepisurus CV. = Glyphisodon bandanensis Blkr. = Hel. frenatus, coeruleus Blkr (an. et CV.)?

Les noms génériques à la tête des synonymes sont ceux adoptés et proposés dans mon Mémoire sur les Pomacentroïdes de l'Inde archipélagique. (sous presse).

Réduction faite des espèces nominales, il ne reste des espèces enregistrées jusqu'ici comme insulindiennes et au nombre d'environ une centaine, que 82 ou 83. A l'exception de deux des Philippines, qui ne font pas partie de mes collections, toutes ces espèces sont figurées sur les planches des 34e et 35e livraisons de l'Atlas ichthyologique des Indes orientales Néerlandaises.

La Haye, Novembre 1876.

RÉVISION

DES ESPÈCES DE

PEMPHERIS

DE L'INDE ARCHIPÉLAGIQUE,

PAR

P. BLEEKER.

Les espèces de Pempheris sont assez difficiles à bien caractériser et leur connaissance laisse encore beaucoup à désirer. Faute d'avoir reconnu quelques caractères spécifiques très essentiels, Cuvier et Valenciennes n'ont que fort insuffisamment établi les espèces qu'ils ont cru devoir adopter, et leurs successeurs se sont trouvés embarrassés à rapporter les Pemphérides qu'ils ont pu observer à leurs véritables espèces. Aussi leur synonymie est dévenue de plus en plus embrouillée et on a fini par supprimer plusieurs espèces, non pas parce qu'elles n'existent pas dans la nature, mais tout simplement parce qu'on ne savait plus les distinguer suffisamment de leurs congénères. C'est ainsi que les Pempheris oualensis, otaitensis, vanicolensis et nesogallica CV. ont été réunis avec le Pempheris mangula et que quelques espèces anciennes des auteurs modernes ne sont pas celles qu'on a cru observer.

Bien qu'il reste difficile de bien fixer la synonymie des Pemphérides tant qu'on ne possède pas une connaissance plus exacte des individus types des espèces Cuviériennes, je crois avoir reconnu plusieurs espèces jusqu'ici confondues entre elles, et en pouvoir mieux établir la diagnose.

Les caractères employés jusqu'ici pour distinguer les espèces de Pempheris n'ont pas été tous heureusement choisis. Leur physionomie ne présente pas de différences palpables. La hauteur relative du corps est la même dans presque toutes les espèces et diffère avec l'âge ou le sexe des individus. Les différences que présente le rétrécissement du tronc en arrière de l'origine de l'anale ne sauraient pas s'exprimer par des formules rigoureuses. L'écaillure dans les six espèces que j'ai devant moi, présente à peu près une même formule, mais il est souvent difficile ou impossible de bien compter les écailles, à cause des squamules dont leur partie libre est plus ou moins densément couverte, et qui font paraître les écailles cutanées plus nombreuses. Quelquefois aussi les écailles cutanées de la région dorsale sont irrégulièrement développées, atrophiées ou même en partie remplacées par les squamules, en sorte qu'on n'en peut plus exactement compter les rangées. Les couleurs aussi ne présentent que des caractères d'une valeur secondaire. Celles du corps sont les mêmes pour toutes les espèces et les taches ou bordures brunes ou noirâtres des nageoires, constantes peut-être dans quelques espèces, ne le sont probablement pas dans d'autres. La formule de l'anale n'indique pas non plus des caractères réels, le nombre des rayons variant notablement dans les individus d'une même espèce. La forme de la caudale, enfin, ne diffère dans les espèces que par un peu plus ou moins de convexité du milieu de son bord postérieur.

Je trouve de bons caractères spécifiques dans la dentition, dans les proportions de la longueur et de la hauteur de la tête et dans la longueur relative de la mâchoire supérieure. Ceux que présente l'écaillure et les taches ou bordures des nageoires et le profil rostro-frontal peuvent faciliter la diagnose.

Les écailles supramaxillaires et la petite épine de l'angle préoperculaire, présentes dans toutes les espèces insulindiennes, sont probablement des caractères génériques. Dans toutes mes espèces aussi la ligne latérale se continue jusqu'au bord postérieur de la caudale.

I. Dents intermaxillaires et mandibulaires de la rangée externe plus fortes que les autres, les intermaxillaires dirigées en partie en haut, les mandibulaires dirigées en partie en avant. Tête plus haute que longue. Environ 55 écailles dans la ligne latérale jusqu'à la caudale.

1. Tête 4 à $4\frac{1}{3}$ fois dans la longueur totale. Profil rostro-frontal droit. Mâchoire supérieure $1\frac{2}{3}$ fois dans la longueur de la tête, s'arrêtant sous la partie postérieure de la pupille. Dorsale à bordure antérieure brunâtre. Pectorale sans tache basale brune.

1. *Pempheris mangula* CV.

2. Tête 5 fois dans la longueur totale. Profil rostro-frontal convexe. Mâchoire supérieure 2 fois dans la longueur de la tête, s'arrêtant sous la partie antérieure de la pupille. Dorsale à tache apicale et pectorale à tache basale brunes.

2. *Pempheris oualensis* CV.

II. Dents mandibulaires de la rangée externe pas plus fortes que les autres et non dirigées en avant. Dents intermaxillaires de la rangée externe non dirigées en haut.

1. Tête plus haute que longue. Environ 55 écailles dans la ligne latérale. Profil frontal non concave. Dents intermaxillaires et mandibulaires bien développées, les intermaxillaires de la rangée externe plus fortes que les autres.

a. Tête $4\frac{1}{3}$ à $4\frac{1}{2}$ fois dans la longueur totale. Mâchoire supérieure $1\frac{2}{3}$ à 2 fois dans la longueur de la tête. Dorsale à tache apicale brune. Pectorale sans tache brune.

3. *Pempheris vanicolensis* CV.

b. Tête $4\frac{3}{4}$ fois dans la longueur totale, presque pas plus haute que longue. Dorsale à bordure antérieure, pectorale à tache basale brunes. Mâchoire supérieure 2 fois dans la longueur de la tête. D. 6/9. A. 3/42.

4. *Pempheris adustus* Blkr.

c. Tête 5 fois dans la longueur totale, notablement plus haute que longue. Dorsale à bordure antérieure, pectorale à tache basale brunes. Mâchoire

supérieure $1\frac{2}{3}$ fois dans la longueur de la tête. D. 6/10 ou 6/11. A. 3/39.

5. *Pempheris otaitensis* CV.

2. Tête plus longue que haute, à profil frontal concave, moins de 5 fois dans la longueur totale. Environ 45 écailles dans la ligne latérale. Dents intermaxillaires et mandibulaires rudimentaires peu visibles, les intermaxillaires de la rangée externe pas plus grandes que les autres.

6. *Pempheris Schwenki* Blkr.

Pempheris mangula CV., Poiss. VII p. 228; Blkr, Verh. Bat. Gen. XXIII, Chaet. p. 30 (nec syn. ex parte); Günth., Cat. Fish. II pag. 509 (nec Fisch. Südsee p. 108); Klunz., Syn. Fisch. R. M., Verh. zool. bot. Ges. Wien XXI p. 469 ex parte (nec Day). — Atl. Ichth. tab. 383 fig. 2.

Pemph. corpore oblongo compresso, diametro dorso-ventrali $2\frac{3}{4}$ ad 3 in ejus longitudine; latitudine corporis $2\frac{1}{2}$ ad $2\frac{2}{3}$ in diametro dorso-ventrali; capite 4 et paulo ad $4\frac{1}{3}$ in longitudine corporis, altiore quam longo; linea rostro-frontali rectiuscula; oculis diametro 2 et paulo in longitudine capitis, diametro $\frac{3}{5}$ circ. distantibus; maxilla superiore, ore clauso, maxilla inferiore paulo breviore $1\frac{2}{3}$ circ. in longitudine capitis, sub pupilla desinente; dentibus maxillis serie externa antice ceteris fortioribus conicis curvatis, intermaxillaribus ex parte sursum mandibularibus ex parte antrorsum directis; praeoperculo spina angulari deorsum spectante; regione gulo-ventrali inferne antice acutiuscule carinata postice plana triangulari; squamis trunco inaequalibus, lateribus mediis ceteris majoribus, dorsalibus mediis et lateribus anterioribus plus minusve squamulatis; squamis trunco 55 circ. in linea laterali, 45 circ. in serie longitudinali angulum operculi inter et basin pinnae caudalis; pinna dorsali multo altiore quam longa diametro dorso-ventrali multo minus duplo humiliore, basi 3 ad 3

paulo in longitudine pinnae analis; pinnis pectoralibus capite non ad vix longioribus; ventralibus capite duplo ad minus duplo brevioribus; caudali extensa vix marginata capite non ad vix longiore; anali leviter emarginata basi 2 circ. in longitudine corporis absque pinna caudali; colore corpore superne fuscescente-aureo, inferne dilutiore vel aureo-argenteo, frequenter fusco plus minusve dense arenato; iride flavescente-rosea; pinnis roseis, dorsali antice fusca; pectoralibus basi macula fusca nulla; anali inferne et caudali postice interdum fusco marginatis.

B. 7. D. 6/9. P. 2/16. V. 1/5. A. 3/38 ad 3/40. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Mangula kutti* Russ., Fish. Corom. II p. 10 fig. 111.
Kurtus macrolepidotus Bl. Schn., Syst. p. 164??
Pempheris moluca CV., Poiss. VII p. 228; Val., Règn. an. ed. ill. Poiss. tab. 44 fig. 2; Schl., Faun. Jap. Poiss. p. 85 tab. 44 fig. 3; Cant., Cat. Mal. Fish. p. 175; Günth., Cat. Fish. II p. 509; Day, Fish. Malab. p. 108; Fish. India p. 175 tab. 42 fig. 2.
Pempheris malabarica CV., Poiss. VII p. 229?
Ikan Batu Mal.

Hab. Pinang, Singapura; Java (Batavia); Celebes (Manado); Timor (Kupang); Halmahera (Sahu); Amboina; in mari.

Longitudo 6 speciminum 130‴ ad 150‴.

Rem. Le Pempheris mangula est bien caractérisé par les fortes dents du devant des mâchoires, par la grande tête dont la longueur ne mesure que 4 fois jusqu'à 4⅓ fois dans la longueur totale, par son profil droit, par la longueur de la mâchoire supérieure, par la bordure antérieure brune de la dorsale et par l'absence de tache basale noirâtre à la pectorale.

L'espèce n'est pas commune dans les mers insulindiennes et paraît habiter, hors l'Inde archipélagique, la Mer rouge, les côtes de Zanzibar, de l'Inde continentale, de Chine et de Kiousiou (Japon). Sa présence dans les mers polynésiennes n'a pas encore été positivement démontrée.

Pempheris oualensis CV., Poiss. VII p. 223; Blkr, Bijdr. ichth. Banda, Nat. T. Ned. Ind. II p. 242 (ex parte). — Atl. Ichth. tab. 383 fig. 5.

Pemph. corpore oblongo compresso, diametro dorso-ventrali 3 circ. in ejus longitudine; latitudine corporis $2\frac{2}{3}$ circ. in diametro dorso-ventrali; capite 5 circ. in longitudine corporis, paulo altiore quam longo; linea rostro-frontali convexa; oculis diametro 2 et paulo in longitudine capitis, diametro $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$ distantibus; maxilla superiore, ore clauso, maxilla inferiore paulo breviore, 2 in longitudine capitis, sub pupillae parte anteriore desinente; dentibus maxillis bene conspicuis intermaxillaribus serie externa ceteris fortioribus plus minusve sursum et antrorsum directis, mandibularibus serie externa antice tantum ceteris fortioribus antrorsum directis; praeoperculo angulo spina deorsum spectante; regione gulo-ventrali inferne antice obtusiuscule carinata postice plana trigona; squamis trunco 55 circ. in linea laterali, 45 circ. in serie longitudinali angulum operculi inter et basin pinnae caudalis, lateralibus mediis ceteris majoribus, dorsalibus lateralibusque plurimis squamulatis; pinna dorsali altitudine $1\frac{3}{4}$ circ. in diametro dorso-ventrali, longitudine $3\frac{1}{3}$ circ. in longitudine pinnae analis; pectoralibus capite paulo longioribus; ventralibus capite minus duplo brevioribus; anali longitudine minus quam 2 in longitudine corporis absque pinna caudali; caudali extensa medio postice convexiuscula capite non breviore; corpore superne fuscescente-aureo inferne dilutiore, fuscescente plus minusve arenato; iride flavescente-aurea marginem orbitalem versus fuscescente; pinnis roseis; dorsali apice, pectoralibus basi macula fusca; caudali postice sat late fusco marginata.

B. 7. D. 6/9 vel 6/10. P. 2/16. V. 1/5. A. 3/39 ad 3/43. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Pempheris otaitensis* Kner, Zool. Reis. Novara, Fisch. p. 171 (nec CV.).

Hab. Java (Batavia); Celebes (Manado, Tombariri); Timor (Kupang); Halmahera (Sindangole); Amboina; in mari.

Longitudo 4 speciminum 150‴ ad 171‴.

Rem. Par la dentition l'espèce actuelle est fort voisine du Pempheris mangula, mais elle est distincte par son profil convexe, par sa tête qui est notablement plus petite, et par la tache foncée sur la base de la pectorale. Je la crois identique avec l'oualensis CV., surtout parce qu'il est dit, dans l'article du Pempheris otaitensis CV., que dans celui-ci les dents des mâchoires sont plus fines à proportion que dans l'oualensis.

L'espèce n'est positivement connue, hors l'Insulinde, que des côtes d'Oualan.

Pempheris vanicolensis CV., Poiss. VII p. 227. — Atl. Ichth. tab. 383 fig. 6.

Pemph. corpore oblongo compresso, diametro dorso-ventrali 2⅔ ad 3 in ejus longitudine; latitudine corporis 2⅔ ad 2¾ in diametro dorso-ventrali; capite 4⅓ ad 4½ in longitudine corporis, altiore quam longo; linea rostro-frontali rectiuscula vel convexiuscula; oculis diametro 2 ad 2 et paulo in longitudine capitis, diametro ⅔ circ. distantibus; maxilla superiore, ore clauso, maxilla inferiore paulo breviore, 1⅔ ad 1¾ in longitudine capitis, sub pupilla desinente; dentibus maxillis minimis, intermaxillaribus serie externa ceteris paulo longioribus non sursum directis, mandibularibus serie externa ceteris non longioribus nec antrorsum directis; praeoperculo angulo spina deorsum spectante; regione gulo-ventrali antice acutiuscule vel obtusiuscule carinata postice plana trigona; squamis trunco inaequalibus, 55 circ. in linea laterali, 45 circ. in serie longitudinali angulum operculi inter et basin pinnae caudalis, lateralibus mediis ceteris majoribus, dorsalibus et lateralibus mediis plus minusve squamulatis; pinna dorsali altitudine 1⅔ ad 1¾ in diametro dorso-ventrali, longitudine 3 ad 3 et paulo in longitudine pinnae analis; pectoralibus capite non ad vix longioribus; ventralibus capite minus duplo brevioribus; anali longitudine 2 fere ad 2 in longitudine corporis absque pinna

caudali; caudali extensa medio non convexa capite non ad vix breviore; colore corpore superne fuscescente-aureo, inferne dilutiore vel aureo-argenteo, fuscescente plus minusve arenato; iride roseo-flavescente; pinnis roseis; dorsali apice fusca; pectoralibus basi macula fusca nulla; anali inferne frequenter fusco marginata; caudali margine posteriore fusca.

B. 7. D. 6/9 vel 6/10. P. 2/16 vel 2/17. V. 1/5. A. 3/39 ad 3/45. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Stompkop* Ruysch, Coll. nov. pisc. Amb. p. 18 tab. 10 fig. 4.
Toutetou-mamel Ren., Poiss. Mol. I tab. 15 fig. 85.
Toetetoe Valent., Amb. fig. 46.
Pempheris nesogallica CV., Poiss. VII p. 228?
Pempheris moluca Blkr, Verh. Bat. Gen. XXIII Chaet. p. 30 descr. et synon. ex parte.
Pempheris mangula Kner, Zool. Reis. Novara Fisch. p. 171 (nec CV.).
Ikan Batu Mal.

Hab. Singapura; Java (Batavia); Celebes (Macassar); Sangi; Timor Kupang); Ternata; Amboina; in mari.

Longitudo 34 speciminum 110‴ ad 180‴.

Rem. Le Pempheris actuel et ceux dont la description va suivre se distinguent des Pempheris mangula et oualensis CV par les petites dents des mâchoires, où il ne s'en trouve pas, dans la rangée externe de coniques plus fortes dirigées en haut ou en avant.

Le Pempheris vanicolensis est facile à distinguer par la combinaison des caractères d'une tête plus haute que longue et dont la longueur ne mesure que $4\frac{1}{3}$ jusqu'à $4\frac{1}{2}$ fois dans la longueur totale, d'une mâchoire supérieure moins du double plus courte que la tête, d'une tache brune ou noire au sommet de la dorsale, et de l'absence de tache foncée à la base de la pectorale.

L'espèce est la plus commune du genre dans l'Insulinde. Hors l'Inde archipélagique elle est connue habiter les côtes de Vanicolo. Si le Pempheris nesogallica CV. n'en est pas distinct. elle habite aussi les mers de l'île Maurice.

Pempheris adustus Blkr. — Atl. Ichth. tab. 383 fig. 1.

Pemph. corpore oblongo compresso. diametro dorso-ventrali 3 circ. in ejus longitudine; latitudine corporis $2\frac{1}{3}$ circ. in diametro dorso-ventrali; capite $4\frac{3}{4}$ circ. in longitudine corporis. paulo altiore quam longo; linea rostro-frontali convexiuscula; oculis diametro 2 et paulo in longitudine capitis. diametro $\frac{2}{3}$ circ. distantibus; maxilla superiore. ore clauso. maxilla inferiore paulo breviore. 2 fere in longitudine capitis. sub pupillae parte anteriore desinente; dentibus maxillis parvis intermaxillaribus serie externa ceteris paulo longioribus non sursum directis. mandibularibus serie externa ceteris non longioribus nec antrorsum directis; praeoperculo angulo spinula deorsum spectante; regione gulo-ventrali antice obtuse carinata postice plana; squamis trunco inaequalibus. 50 circ. in linea laterali. 40 circ. in serie longitudiuali angulum operculi inter et basin pinnae caudalis. squamis mediis lateribus ceteris majoribus. lateralibus superioribus dorsalibusque ex parte squamulatis; pinna dorsali altitudine $1\frac{3}{4}$ circ. in diametro dorso-ventrali. longitudine 3 et paulo in longitudine pinnae analis; pectoralibus capite paulo longioribus; ventralibus capite duplo fere brevioribus; anali 2 circ. in longitudine corporis absque pinna caudali; caudali extensa vix emarginata capite non vel vix longiore; colore corpore superne fuscescente-aureo. inferne dilutiore. plus minusve dense fusco arenato; iride margine pupillari aurea margine orbitali fusca; regione postoculari et operculo postice fuscis; pinnis roseis; dorsali antice late fusco marginata; pectoralibus basi macula nigra vel fusca; ventralibus. anali caudalique dimidio basali fuscescentibus.

B. 7. D. 6/9. P. 2/16. V. 1/5. A. 3/42. C. 1/14(15)/1 et lat. brev.
Syn. *Pempheris mangula* Günth., Fisch. Südsee p. 102 tab. 59 fig. B (nec aliis locis).
Hab. Amboina, in mari.
Longitudo speciminis unici 167‴.

Rem. Je crois reconnaître l'espèce actuelle dans la figure de M. Garrett citée ci-dessus, figure dont M. Günther dit à juste titre que l'écaillure du corps est inexactement rendue, et qui est est fautive aussi par rapport à l'écaillure des mâchoires et des nageoires et à la ligne latérale, ligne qui dans toutes les espèces se continue jusqu'au bord postérieur de la caudale.

L'espèce tient le milieu, par ses affinités, entre les Pempheris vanicolensis et otaitensis, et se distingue par sa petite tête, par la brièveté de la mâchoire supérieure et par la couleur foncée de la base des ventrales, de l'anale et de la caudale.

Si le rapprochement que je viens de faire est exact, l'espèce habite aussi les côtes des îles Kingsmill, ou M. Garrett en vit de nombreux individus.

Pempheris otaitensis CV., Poiss. VII p. 226; Less., Zool. Voy. Coq. Poiss. p. 167; Blkr, Bijdr. ichth. Banda, Nat. T. Ned. Ind. II p. 242 (ex parte); Günth., Cat. Fish. II p. 167 (nec syn.) — Atl. Ichth. tab. 383 fig. 1.

Pemph. corpore oblongo compresso, diametro dorso-ventrali 3 circ. in ejus longitudine; latitudine corporis $2\frac{2}{3}$ ad 3 fere in diametro dorso-ventrali; capite 5 circ. in longitudine capitis, sat multo altiore quam longo; linea rostro-frontali convexiuscula; oculis diametro 2 et paulo in longitudine capitis, diametro $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$ distantibus; maxilla superiore, ore clauso, maxilla inferiore vix breviore, $1\frac{2}{3}$ circ. in longitudine capitis, sub posteriore pupillae parte desinente; dentibus maxillis parvis, intermaxillaribus serie

externa ceteris paulo longioribus non sursum spectantibus, mandibularibus serie externa ceteris non longioribus nec antrorsum directis; praeoperculo angulo spinula deorsum spectante; squamis trunco inaequalibus, 55 circ. in linea laterali, 45 circ. in serie longitudinali angulum operculi inter et basin pinnae caudalis; squamis mediis lateribus ceteris majoribus, dorsalibus et lateralibus plus minusve squamulatis; regione gulo-ventrali inferne antice obtuse carinata postice plana; pinna dorsali altitudine $1\frac{2}{3}$ ad $1\frac{3}{4}$ in diametro dorso-ventrali, longitudine 3 circ. in longitudine pinnae analis; pinnis pectoralibus capite non ad vix longioribus; ventralibus capite minus duplo brevioribus; anali longitudine 2 fere in longitudine corporis absque pinna caudali; caudali extensa medio postice non vel vix emarginata capite non vel vix longiore; colore corpore superne fuscescente-aureo, inferne dilutiore vel aureo-argenteo, fuscescente plus minusve arenato; iride roseo-flavescente; pinnis roseis; dorsali antice fusca; pectoralibus basi macula fusca; anali basi profundiore, antice fuscescente.

B. 7. D. 6/10 vel 6/11. P. 2/15. V. 1/5. A. 3/39 vel 3/40. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Pempheris taitensis* CV., Poiss. VII tab. 191.

Hab. Amboina; Banda (Neira), in mari.

Longitudo speciminis unici 181‴.

Rem. Le Pempheris otaitensis ressemble beaucoup au Pempheris oualensis par les formes et il a la tache basale de la pectorale aussi marquée, mais il est nettement distinct par l'absence de dents externes coniques et plus fortes dirigées en haut ou en avant, toutes les dents de la rangée externe étant fort petites et courbées en arrière. Sa place naturelle est près des Pempheris vanicolensis et adustus, mais il se fait reconnaître par sa tête plus petite. Il a la bordure antérieure de la dorsale et la tache basale de la pectorale comme l'adustus, mais en diffère par la mâchoire supérieure, qui est plus longue, et par un rayon de plus

à la dorsale. L'absence de taches foncées operculaires et de couleur brune à la base des ventrales et de la caudale pourrait bien aussi être indicative d'une différence spécifique.

L'espèce n'est positivement connue habiter, hors l'Insulinde, que les côtes d'Otaiti.

Pempheris Schwenki Blkr, Bijdr. ichth. Batoe, Ned. T. Ned. Ind. VIII p. 314; Günth., Cat. Fish. II p. 510. — Atl. Ichth. tab. 383 fig. 3.

Pemph. corpore oblongo compresso, diametro dorso-ventrali 3 fere in ejus longitudine; latitudine corporis $2\frac{1}{2}$ circ. in diametro dorso-ventrali; capite $4\frac{3}{5}$ ad $4\frac{2}{3}$ in longitudine corporis, paulo longiore quam alto; linea rostro-frontali rostro convexa fronte concaviuscula; oculis diametro 2 ad 2 et paulo in longitudine capitis, diametro $\frac{2}{3}$ circ. distantibus; maxilla superiore, ore clauso, maxilla inferiore vix breviore, $1\frac{3}{4}$ circ. in longitudine capitis, sub pupilla desinente; dentibus maxillis minimis parum conspicuis serie externa ceteris non fortioribus, nec sursum nec antrorsum directis; praeoperculo angulo spinula deorsum spectante; regione gulo-ventrali inferne antice acutiuscule carinata postice plana trigona; squamis trunco valde inaequalibus, 45 circ. in linea laterali, 35 circ. in serie longitudinali angulum operculi inter et basin pinnae caudalis, lateralibus mediis ceteris majoribus, lateralibus et dorsalibus plus minusve squamulatis; pinna dorsali diametro dorso-ventrali duplo circ. humiliore, longitudine 3 fere in longitudine pinnae analis; pectoralibus capite vix brevioribus; ventralibus capite duplo circ. brevioribus; anali longitudine 2 in longitudine corporis absque pinna caudali; caudali extensa vix emarginata capite paulo breviore; colore corpore superne fuscescente-aureo, inferne dilutiore vel aureo-argenteo, fusco plus minusve arenato; iride flavescente-rosea; pinnis roseis; dorsali apice late nigricante vel fusca; anali dimidio basali nigricante-

violacea; pectoralibus basi macula nigra nulla; caudali superne, inferne et postice nigricante vel fusco marginata.

B. 7. D. 6/9 vel 6/10. P. 2/15 vel 2/16. V. 1/5. A. 3/36 vel 3/37. C. 1/15/1 et lat. brev.

Hab. Sumatra (Trussan); Batu; in mari.

Longitudo 2 speciminum 117‴ et 119‴.

Rem. Le Pempheris Schwenki est nettement distinct des autres espèces insulindiennes par sa tète qui est plus longue que haute, par son profil frontal concave, par ses petites dents rudimentaires et par un nombre moindre de rangées transversales d'écailles du tronc. On ne le connaît jusqu'ici que de la mer des côtes occidentales de Sumatra.

La Haye, Mai 1876.

SUR LE DOSAGE PAR LE POLARISTROBOMÈTRE DE LA QUININE DANS LES ÉCORCES DE QUINQUINA,

PAR

A. C. OUDEMANS Jr.

Dans mon Mémoire: *Sur le pouvoir rotatoire spécifique des principaux alcaloïdes du quinquina, à l'état libre et à l'état combiné* [1], j'ai exprimé l'opinion que l'emploi du polaristrobomètre peut devenir d'un utile secours dans l'analyse quantitative des mélanges de deux ou de plusieurs alcaloïdes du quinquina, et j'ai tâché de montrer, par quelques exemples, que les influences perturbatrices qui peuvent être exercées soit par des changements du degré de concentration, soit par la présence simultanée de différents alcaloïdes, sont en tout cas si faibles, que le dosage par le polaristrobomètre donne, pour peu qu'on en ait l'habitude, des résultats beaucoup plus exacts que ceux obtenus par une analyse purement chimique.

J'ai été conduit à continuer mes recherches à cet égard par la circonstance que quelques chimistes et fabricants de quinine, pour juger de la valeur des écorces, déterminent la proportion de quinine en précipitant, dans la solution fournie par les écorces traitées d'une certaine manière, la quinine et la cinchonidine

---

[1]) Arch. Néerl., T. X., p. 193.

à l'état de tartrates peu solubles et en isolant ensuite, sous l'une ou l'autre forme, la quinine de ce mélange.

A en juger par ce que m'avaient appris mes études antérieures, il ne me paraissait pas impossible de trouver, au moyen du polaristrobomètre, la richesse en quinine d'un pareil mélange de tartrates. Il est vrai que ces combinaisons sont insolubles dans l'eau, mais elles se dissolvent facilement dans les acides étendus. Il s'agissait seulement de déterminer pour chacun des deux tartrates, en présence d'une quantité connue d'acide, la constante de la rotation, et de décider, par des expériences synthétiques, si le pouvoir rotatoire spécifique d'un mélange de ces sels pouvait servir à calculer de l'une ou de l'autre manière sa composition centésimale, et par suite aussi la proportion de quinine.

Le résultat de cette recherche a de beaucoup dépassé mon attente et m'a confirmé dans l'opinion que, par l'observation exacte du P. R. S., on arrive en pareil cas beaucoup plus vite au but, que par une analyse chimique longue et pénible.

Ce résultat est, en outre, une réfutation péremptoire du jugement défavorable que M. Hesse a porté, avec trop de précipitation et sans preuves aucunes, sur l'utilité de la détermination du P. R. S. dans les recherches quinologiques [1]).

Je tâcherai de résumer ici, aussi brièvement que possible, ce qui est nécessaire pour apprécier équitablement la méthode recommandée par moi et l'exactitude à laquelle elle permet d'atteindre.

Sur les tartrates neutres de quinine et de cinchonidine.

Le tartrate neutre de quinine a été étudié par M. Arppe [2]). Ce chimiste a trouvé que la combinaison, séchée à 130°—140° C., ne perdait que 1,5 pour cent d'eau, d'où il a conclu que le sel

---

[1]) Voir *Ann. der Chemie u. Pharm.*, T. CLXVI, p. 230.

[2]) *Journ. f. pr. Chem.*, T. LIII, p. 334.

ne renfermait pas d'eau de cristallisation, d'autant plus que, après la dessiccation, il n'avait pas du tout l'aspect effleuri. Ce résultat, toutefois, ne concorde pas avec celui que j'ai obtenu; à différentes reprises j'ai préparé le tartrate, en précipitant par le tartrate de potasse et de soude des solutions neutres de sels de quinine purs, et toujours j'y ai trouvé, par la dessiccation à 120°—130° C., une proportion d'eau équivalant à 1 molécule H_2O. En outre, le tartrate desséché différait manifestement du sel non chauffé; il présentait une structure spéciale et avait un P. R. S. qui surpassait celui du tartrate non desséché d'une quantité correspondant précisément à la perte de 1 molécule d'eau.

A l'appui de ce que je viens de dire, je donne ici les résultats de quelques-uns de mes dosages d'eau:

1°. 1,1420 gr. de tartrate (produit A, encore un peu cohérent) perdirent, en 4 heures de dessiccation à 125° C., 0,0288 gr. d'eau.

2°. 1,3218 gr. de tartrate (produit B, en grains cristallins parfaitement séchés à l'air) perdirent, en 4 heures de dessiccation à 130° C., 0,0292 gr. d'eau.

3°. 1,1124 gr. de tartrate (produit C, longues aiguilles, réduites en poudre fine, parfaitement séchée à l'air) perdirent, en 5 heures de dessiccation à 125° C., 0,0240 gr. d'eau.

Par conséquent:

Trouvé			Calculé d'après
1°.	2°.	3°.	$2(C_{20}H_{24}N_2O_2),C_4H_6O_6+H_2O$
2,6	2,1	2,2	2,2

Si M. Arppe n'a trouvé que 1,5 pour cent d'eau, cela s'explique peut-être par la circonstance que le tartrate de quinine ne perd son eau de cristallisation qu'assez lentement à la température de 130°.

Je crois donc devoir adopter pour le tartrate de quinine la composition: $2(C_{20}H_{24}N_2O_2),C_4H_6O_6+H_2O$.

Quant au tartrate de cinchonidine, il a fait l'objet d'un examen de M. Hesse [1], d'après lequel il correspondrait à la formule

[1] *Ann. der Chem. u. Pharm.*, T. CXXXV, p. 337.

$2(C_{20}H_{24}N_2O),C_4H_6O_6+2H_2O$. Cette formule exige 4,5 pour cent d'eau.

M. Hesse a trouvé, dans 4 expériences, 4,5—4,7 pour cent H_2O. Bien que ces déterminations méritent toute confiance, j'ai, moi aussi, dosé à différentes reprises, par la dessiccation à 130°, l'eau de cristallisation du tartrate de cinchonidine, dosages qui m'ont donné une proportion de 4,2 à 4,5 pour cent.

En adoptant les formules qui viennent d'être indiquées, on trouve pour la teneur en quinine des deux sels:

79,41 pour cent de quinine dans le tartrate de quinine
76,80 » » » cinchonidine dans le tartrate de cinchonidine.

Pouvoir rotatoire spécifique des tartrates de quinine et de cinchonidine dissous dans un faible excès d'acide chlorhydrique.

Pour déterminer le P. R. S., j'ai choisi le rapport de 6 C.C. d'acide chlorhydrique normal sur 0,816 gr. de tartrate de quinine et sur 0,802 gr. de tartrate de cinchonidine. Ces deux poids représentent chacun 1 molécule du sel, exprimée en milligrammes. La quantité indiquée d'acide chlorhydrique est suffisante pour que, en y délayant le tartrate, celui-ci se dissolve immédiatement.

Voulant, toutefois, me rendre compte de l'influence exercée par le degré de concentration, et aussi rendre possible le dosage de la quinine à d'autres degrés de concentration que celui indiqué plus haut, j'ai fait, à la température de 17° C., trois séries d'expériences, chaque fois avec un autre liquide, dans lequel le rapport de 1 molécule de tartrate à 6 ClH était conservé, mais où variait la proportion d'eau.

Ces liquides étaient composés ainsi qu'il suit:

A. 0,4 gr. de tartrate et 3 C.C. de ClH normal sur 20 C.C. d'eau.
B. 0,8 » » » » 6 » » » » » 20 » »
C. 1,2 » » » » 9 » » » » » 20 » »

Le tartrate de quinine, qui servit à ces expériences, avait été obtenu en dissolvant l'alcaloïde pur, extrait du benzolate de quinine, dans l'acide chlorhydrique étendu, jusqu'à réaction faiblement acide, précipitant alors le liquide à chaud par le sel de Seignette, et faisant recristalliser dans l'alcool très étendu le sel déposé.

Le tartrate de cinchonidine avait été préparé en précipitant par le sel de Seignette une solution chaude de chlorhydrate neutre de cinchonidine.

Les deux tartrates avaient, après le lavage, été séchés à l'air.

Les résultats de l'examen furent les suivants:

Tartrate de quinine.

Concentration A.

(0,4 gr. de tartrate et 3 C.C. ClH normal sur 20 C.C.).

$(\alpha)_D = 216°,0$

$(\alpha)_D = 215°,6$

$(\alpha)_D = 215°,3$

$(\alpha)_D = 215°,8$

Moyenne $(\alpha)_D = 215°,8$

Concentration B.

(0,8 gr. de tartrate et 6 C.C. ClH normal sur 20 C.C.).

$(\alpha)_D = 211°,2$

$(\alpha)_D = 211°,7$

$(\alpha)_D = 211°,5$

Moyenne $(\alpha)_D = 211°,5$

Concentration C.

(1,2 gr. de tartrate et 9 C.C. ClH normal sur 20 C.C.).

$(\alpha)_D = 207°,7$

$(\alpha)_D = 207°,9$

Moyenne $(\alpha)_D = 207°,8$

Tartrate de cinchonidine.

Concentration A.

(0,4 gr. de tartrate et 3 C.C. ClH normal sur 20 C.C.).

$(\alpha)_D = 131°,2$

$(\alpha)_D = 131°,4$

Moyenne $(\alpha)_D = 131°,3$

Concentration B.

(0.8 gr. de tartrate et 6 C.C. ClH normal sur 20 C.C.)

$(\alpha)_D = 129°.9$

$(\alpha)_D = 129°.3$

Moyenne $(\alpha)_D = 129°,6$

Concentration C.

(1.2 gr. de tartrate et 9 C.C. ClH normal sur 20 C.C.).

$(\alpha)_D = 127°.8$

$(\alpha)_D = 128°.3$

Moyenne $(\alpha)_D = 128°,1$

Il ne sera pas tout à fait superflu de faire ici la remarque que le P. R. S. observé n'est pas celui qui revient au tartrate lui-même, mais qu'à vrai dire il est relatif à un sel décomposé en tout ou en partie par l'acide chlorhydrique étendu.

Dans mes expériences antérieures concernant l'influence des acides en excès sur le P. R. S. des alcaloïdes du quinquina, j'avais pris un degré de concentration tel que pour 20 C.C. de liquide il y eût 0,312 gr. (environ 1 molécule exprimée en milligrammes) d'alcaloïde. Comme cette quantité correspond précisément à 405 milligrammes de tartrate, c'est-à-dire, à très peu près à la dose employée pour la concentration A, nous pouvons par le calcul arriver à savoir si les tartrates dissous dans l'acide chlorhydrique se comportent entièrement comme des mélanges d'un peu d'acide tartrique avec des alcaloïdes dissous dans un excès d'acide chlorhydrique (3 HCl sur 1 molécule d'alcaloïde).

Pour le P. R. S. du tartrate de quinine, nous trouvons, avec la concentration A, 215°,8; on déduit de là pour la quinine le nombre 271°,7; le P. R. S. de l'acide tartrique (dans la supposition qu'il ne soit pas modifié par le léger excès d'acide chlorhydrique et par la présence du chlorhydrate acide de quinine) est d'après la formule donnée par M. Landolt, précisément ↗ 15°,0. La rotation à droite, provenant de la faible quantité d'acide tartrique (0,0746 gr.) qui existe dans le mélange, s'élève à 0°,17, valeur qui doit être ajoutée au P. R. S. calculé pour la quinine, si l'on veut avoir la vraie grandeur de ce pouvoir, tel qu'il s'est manifesté dans la solution mixte. On arrive ainsi au chiffre 271°,9. Précédemment nous avions trouvé que 1 molécule de quinine, répartie avec 3 C.C. d'acide chlorhydrique normal sur 20 C.C., fournissait un P. R. S. de 278°,5, et on voit par conséquent que, dans les circonstances données, la présence de l'acide tartrique diminue la valeur de $(\alpha)_D$ chez la quinine.

En appliquant le même calcul à la cinchonidine, nous obtenons pour $(\alpha)_D$, après la correction relative à l'acide tartrique, le nombre 171°,2, tandis que précédemment, pour le même rapport entre l'alcaloïde et l'acide chlorhydrique, mais en l'absence de l'acide tartrique, nous avions trouvé 175°,6.

Les solutions examinées ne se comportent donc *pas* comme un mélange d'acide tartrique et de quinine dissoute dans 3 molécules Cl H, et ce fait me paraît devoir être attribué à ce que l'alcaloïde n'est pas uni en entier à l'acide chlorhydrique, mais encore combiné pour une partie avec l'acide tartrique; il est très probable, en effet, que la quinine a un P. R. S. plus faible dans une solution tartrique acide que lorsqu'elle est dissoute dans un excès d'acide chlorhydrique.

Pouvoir rotatoire spécifique des mélanges des deux tartrates dissous dans un léger excès d'acide chlorhydrique.

Comme les tartrates de quinine et de cinchonidine ne diffèrent que peu entre eux quant au poids moléculaire et à la proportion

d'alcaloïde contenue dans chaque sel, l'addition de 6 C.C. d'acide chlorhydrique normal à 0,810 gr. du mélange de tartrates produira, en ce qui concerne la sursaturation des deux alcaloïdes, à peu près le même effet que celui qui résulte de la dissolution de 0,8 gr. de chacun des deux tartrates, pris séparément. Mes expériences antérieures ont montré, en effet, que quelques milligrammes d'alcaloïde ou quelques gouttes d'acide chlorhydrique normal, en plus ou en moins, ne changent pas d'une manière appréciable le résultat.

J'avais donc lieu d'espérer que, en déterminant le P. R. S. de mélanges contenant sur 20 C.C. autant d'acide chlorhydrique normal et de tartrates mêlés qu'il a été indiqué ci-dessus pour les tartrates *purs*, je parviendrais à la connaissance de la composition centésimale de ces mélanges.

Pour cela, je n'avais qu'à faire usage des formules:

$215^\circ,8 \times x + 131^\circ,3 \times (100-x) = 100 \times (\alpha)_m$ (pour la concentrat. A)
$211^\circ,5 \times x + 129^\circ,6 \times (100-x) = 100 \times (\alpha)_m$ (» » » B)
$207^\circ,8 \times x + 128^\circ,1 \times (100-x) = 100 \times (\alpha)_m$ (» » » C)

où x est la proportion centésimale de tartrate de quinine et $(\alpha)_m$ le P. R. S. observé pour la raie D du mélange de tartrates traité de la manière qui vient d'être décrite.

Voici maintenant les résultats de quelques expériences faites dans cette prévision:

CONCENTRATION A.

P. R. S. observé. $(\alpha)_D$.	Proportion réelle de tartrate de quinine dans le mélange.	Proportion de tartrate de quinine calculée d'après le P. R. S.	Δ
152°,5	25,0 pCt.	25,1 pCt.	— 0,1
165°,7	39,7 »	40,7 »	— 1,0
171°,9	47,9 »	48,0 »	— 0,1
183°,5	60,0 »	61,8 »	— 1,8
191°,6	70,3 »	71,4 »	— 1,1
194°,3	73,8 »	74,6 »	— 0,8
195°,3	75,2 »	75,7 »	— 0,5
203°,3	85,2 »	85,2 »	0

CONCENTRATION B.

P. R. S. observé. $(\alpha)_D$.	Proportion réelle de tartrate de quinine dans le mélange.	Proportion de tartrate de quinine calculée d'après le P. R. S.	Δ
150°,2	25,3 pCt.	25,0 pCt.	+ 0,3
171°,2	49,1 »	50,6 »	— 1,5
170°,8	50,0 »	50,3 »	— 0,3
172°,3	52,5 »	52,0 »	+ 0,5
183°,7	64,3 »	66,0 »	— 1,7
186°,0	68,8 »	69,7 »	— 0,9
188°,0	70,1 »	71,3 »	— 1,2
191°,7	75,0 »	75,8 »	— 0,8
195°,3	79,6 »	80,2 »	— 0,6
195°,1	80,2 »	80,0 »	— 0,2
203°,5	90,9 »	90,2 »	+ 0,7

CONCENTRATION C.

P. R. S. observé. $(\alpha)_D$.	Proportion réelle de tartrate de quinine dans le mélange.	Proportion de tartrate de quinine calculée d'après le P. R. S.	Δ
147°,5	24,9 pCt.	24,3 pCt.	+ 0,6
171°,3	54,6 »	54,1 »	+ 0,5
189°,1	75,4 »	76,4 »	— 1,0

On voit par ces résultats que l'exactitude obtenue est très satisfaisante.

La circonstance que les différences tombent la plupart dans un sens déterminé, et qu'ordinairement on trouve *trop* de tartrate de quinine, tend à faire croire que la loi, suivant laquelle le P. R. S. des mélanges dépend de leur composition, ne doit pas être représentée par une droite, mais par une ligne à très faible courbure. La précision atteinte n'était toutefois pas assez grande pour donner à cet égard une certitude complète.

En terminant, je donnerai les formules qu'il convient d'employer dans le calcul de la composition du mélange des tartrates pour toutes les concentrations entre 0,4 et 1,2 gr. de tartrate sur 20 C.C.

Gr. de tartrate sur 20 C.C.	Nomb. de C.C. de ClH. norm.	Formules propres au calcul de la composition du mélange: valables pour $t = 17_0$ C.
0,405	3	$215°,8\,x + 131°,3\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
0,506	3,75	$214°,7\,x + 130°,9\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
0,608	4,50	$213°,6\,x + 130°,4\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
0,708	5,25	$212°,5\,x + 130°,0\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
0,810	6,00	$211°,5\,x + 129°,6\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
0,911	6,75	$210°,4\,x + 129°,2\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
1,012	7,50	$209°,5\,x + 128°,8\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
1,114	8,25	$208°,6\,x + 128°,4\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$
1,215	9,00	$207°,8\,x + 128°,1\,(100-x) = 100 \times (\alpha)^m$

Delft, 26 Novembre 1875.

SUR LA PROBABILITÉ DES DIVERS RÉSULTATS POSSIBLES D'UNE ÉLECTION POUR LAQUELLE DES VOTANTS DE DEUX OPINIONS DIFFÉRENTES SE PARTAGENT EN SECTIONS PAR LA VOIE DU SORT;

PAR

D. J. KORTEWEG.

I.

§ 1. Lorsqu'un certain nombre de personnes, devant procéder à des votes ou à des nominations, se partagent par la voie du sort en plusieurs sections de force numérique égale, sous la condition que chaque section émettra ensuite un seul vote ou effectuera une seule nomination, — le résultat obtenu dépend en partie du hasard.

Supposons qu'il y ait en général ks votants, qui se répartissent en k sections, toutes également nombreuses, et que a voix appartiennent à la majorité, b à la minorité; la probabilité d'une répartition telle, que dans m bureaux triomphe la majorité, dans n la minorité, sera alors une fonction de a, b, m et n, que nous représenterons dans la suite par

$$P_{m.n}^{a.b},$$

ou, lorsqu'il n'en pourra résulter aucun malentendu, par

$$P_{m.n}.$$

C'est cette fonction que nous allons chercher à déterminer.

§ 2. Dans ses „*Recherches sur la probabilité des jugements*" (éd. de 1837, p. 231, § 90), Poisson s'occupe d'un problème

analogue. Il détermine, en effet, la probabilité que dans un bureau unique de s membres, choisis dans une assemblée de ks personnes, dont a appartiennent à la majorité et b à la minorité, triomphe *ou bien* la majorité *ou bien* la minorité. De cette probabilité on déduit alors d'une manière très simple le résultat *moyen* des votes ou nominations des bureaux.

Soit, en effet, p la probabilité d'une nomination dans le sens de la majorité, et q celle d'une nomination dans le sens de la minorité ($p + q = 1$); en cas d'un très grand nombre r de nominations faites par de pareils bureaux, il devra alors, d'après la loi des grands nombres, y en avoir environ $p\,r$ dans le sens de la majorité et $q\,r$ dans le sens de la minorité. Le résultat *moyen* des k nominations, faites successivement après chaque tirage au sort, devra par conséquent comprendre $p\,k$ membres de la majorité et $q\,k$ de la minorité. Dès que p ou q a été calculé (et cela a lieu au moyen d'une formule simple, que nous donnerons plus loin), ce rapport *moyen* est donc connu.

§ 3. En outre, ces valeurs p et q peuvent encore servir à résoudre un problème qui offre avec le nôtre une grande analogie. Tel qu'il est énoncé, notre problème concerne une assemblée qui se divise par le sort en un certain nombre de sections, dont chacune émet ensuite un vote ou effectue une nomination. Mais nous aurions aussi pu considérer un autre cas, celui où la même assemblée tire de son sein, par la voie du sort, un bureau unique de s membres, qui émet un vote, puis se dissout immédiatement; après quoi ses membres concourent avec tous les autres à un nouveau tirage pour la composition d'un second bureau, qui à son tour vote, puis se dissout; cette opération étant continuée jusqu'à ce qu'un certain nombre de votes soit acquis. Dans cette supposition, la probabilité $P'_{m,n}$ (où l'on n'a plus nécessairement $m + n = k$) dépend très simplement de p et q; en effet, comme la composition du second bureau est maintenant entièrement indépendante de celle du premier (puisque la circonstance d'avoir fait partie du premier n'exclut plus l'entrée dans le second), on peut appliquer les lois de la probabilité composée

pour des événements indépendants l'un de l'autre; ces lois conduisent alors sans peine à l'expression:

$$P'_{m.n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} p^m q^n \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$P_{m.n}$ et $P'_{m.n}$ sont d'ailleurs des grandeurs très différentes; ainsi, par exemple, $P_{o.n}$ devrait être exactement *zéro*, ce qui ne serait pas le cas pour $P'_{o.n}$. Tandis que, dans l'hypothèse correspondant à $P_{m.n}$, chaque membre doit appartenir à un seul bureau, désigné par le sort, il pourra arriver, dans l'hypothèse à laquelle se rapporte $P'_{m.n}$, qu'un membre déterminé entre dans plusieurs sections ou ne prenne place dans aucune, selon que le hasard en décidera. Il résulte de là, que dans l'hypothèse $P_{m.n}$ il y a, quant à leur composition, *dépendance* mutuelle entre les différentes sections, et qu'il n'y en au contraire *pas* dans l'hypothèse $P'_{m.n}$. Si nous nous figurons que, dans la supposition $P_{m.n}$, le vote des différents bureaux ait aussi lieu suivant un certain ordre fixé d'avance, — ce qui naturellement ne peut influer en rien sur le résultat, — chaque triomphe de la minorité dans un bureau quelconque affaiblira considérablement ses chances de victoire dans les bureaux suivants. Plus généralement, dès que, après un certain nombre de votes, moindre que k, soit la majorité, soit la minorité se trouve dans un rapport anormalement favorable, il y a pour elle, si l'avantage est à la minorité, *certitude*, et, s'il est à la majorité, *forte probabilité* que le nombre de ses membres sera aussi anormalement réduit dans les bureaux restants; *à priori*, il est donc probable que les votes ultérieurs auront pour effet d'enlever au rapport son caractère anormal. Pour des valeurs anormales de m et de n, c'est-à-dire, pour des valeurs qui sont très éloignées de pk et de qk, $P_{m.n}$ sera par conséquent plus petit que $P'_{m.n}$; mais, en revanche, pour des valeurs normales de m et de n, $P_{m.n}$ devra surpasser $P'_{m.n}$, attendu qu'on a:

$$\sum_{n=0}^{n=k} P_{m.n} = \sum_{n=0}^{n=k} P'_{m.n} = 1.$$

§ 4. Poisson ne se borne pas à calculer le nombre moyen des sections où triomphe soit la majorité, soit la minorité. Après avoir trouvé, par exemple, pour le cas où 199,665 électeurs, comprenant une majorité de 104,830 et une minorité de 94,835, se partagent en 459 sections,

$$p = 0{,}85426\ldots,\quad q = 0{,}14574\ldots,$$

et en avoir déduit que le résultat moyen sera

$$\text{majorité} = 0{,}85426\ldots \times 459 = 392 \text{ sect.},$$
$$\text{minorité} = 0{,}14574\ldots \times 459 = \ \ 67 \text{ sect.},$$

il se demande quelle est la probabilité que l'écart entre le résultat réellement obtenu et le rapport moyen ne dépasse pas un certain nombre donné de sections.

Il prend, par exemple, comme cas-limites:

$$\text{majorité} = 392 \pm 21,\quad \text{minorité} = 67 \mp 21,$$

et donne alors, pour la probabilité R' que le résultat effectif est compris entre ces limites,

$$R' = 0{,}99682.$$

Pour ce calcul, toutefois, il fait usage d'une formule qui s'applique au cas de k événements *indépendants* l'un de l'autre, et où, de deux éventualités données, qui possèdent des probabilités constantes p et q $(p+q=1)$, l'une doit toujours se réaliser. Sa formule fait connaître, pour ce cas, la probabilité que l'une des éventualités ne se présentera pas plus de $pk+r$ fois, et pas moins de $pk-r$ fois; en d'autres termes, Poisson somme entre les limites indiquées les probabilités $P'_{m.n}$, et non, comme il le fallait, les probabilités $P_{m.n}$.

Il est vrai que Poisson n'a en vue que des valeurs de k qui ne soient pas trop petites, et que pour de pareilles valeurs, dans le cas où m et n ne s'éloignent pas trop de la moyenne, les expressions $P_{m.n}$ et $P'_{m.n}$ ne différeront peut-être pas beaucoup l'une de l'autre; mais il nous parait pourtant risqué, même à titre d'approximation, d'admettre *à priori* l'égalité de ces deux probabilités.

Lorsque les cas-limites $m = pk + r$ et $m = pk - r$ sont un peu écartés l'un de l'autre, il n'y aura d'ailleurs d'*exclus* que des

résultats anormaux; et comme, pour ces résultats, $P'_{m.n}$ surpasse la probabilité $P_{m.n}$, il faudra, réciproquement, que la somme des probabilités $P'_{m.n}$, *comprises* dans R', soit plus petite que la somme des valeurs correspondantes de $P_{m.n}$. La probabilité R' est donc trop faible. Sa valeur exacte, dans l'exemple choisi par Poisson, devra être encore plus rapprochée de l'unité, de sorte que les conséquences, que Poisson tire de la grandeur de cette probabilité, subsistent *à fortiori.* On reconnaît ainsi que le calcul dé Poisson donne pour la probabilité cherchée une limite inférieure, qui, lorsqu'elle est voisine de l'unité, peut rendre les mêmes services que la valeur exacte elle-même.

§ 5. Nous voyons donc que Poisson, sauf pour le cas d'un très grand nombre de bureaux, s'est borné à calculer le rapport moyen entre les bureaux qui votent dans le sens de la majorité et ceux qui votent dans le sens de la minorité; et qu'il n'a pas cherché à calculer en outre la probabilité de ce rapport moyen, ni celle des autres rapports, différents de celui-ci. Là où il a essayé de le faire, à savoir dans le cas d'un grand nombre de bureaux, sa solution prête à de graves objections. Combler cette lacune, et par conséquent déterminer quelle est la valeur maximum de $P_{m.n}$ et comment cette valeur décroît pour des rapports différents, tel est le but que je me propose d'atteindre. Suivant que les données a, b, m et n, dont $P_{m.n}$ est une fonction, sont ou non de grands nombres, qui rendent nécessaire l'emploi de formules d'approximation, cette recherche se partage d'elle-même en trois parties, à savoir, les suivantes:

A. a et b, et par conséquent aussi m et n sont d'*assez petits* nombres. Dans ce cas, on peut suivre la méthode que j'ai développée dans le *Journal des actuaires français* (t. III, 1874).

B. a et b sont des nombres *assez grands*, m et n au contraire des nombres *assez petits.* Ce cas va faire l'objet de notre étude. Dans ce premier Mémoire, je développerai $P_{m.n}$ sous la forme d'une intégrale connue, et j'en déduirai quelques conclusions générales. L'hypothèse la plus simple, $m + n = 2$, a

déjà été traitée complétement dans le *Journal des actuaires français.*

C. a, b, m et n sont d'*assez grands* nombres. Le calcul de $P_{m,n}$ aura alors moins d'importance, attendu que la probabilité d'un rapport donné devient dans tous les cas très petite. Par contre, il faudra, dans cette hypothèse, tâcher de calculer entre des limites données la valeur de

$$\int P_{m.n}\, dm.$$

Nous n'envisagerons d'ailleurs ici le problème que sous son aspect purement mathématique, en renvoyant, quant à sa signification pratique, au *Journal des actuaires français* (l. c.) et au *Nieuw Archief van het Wiskundig Genootschap* (t. I et II).

II.

§ 6. Avant d'entreprendre la solution de notre problème, il convient (pour obtenir une nomenclature commode) d'introduire des hypothèses très particulières concernant la nature et le mode du vote, ce qui d'ailleurs n'empêchera pas d'étendre les résultats acquis, avec les modifications nécessaires, à d'autres hypothèses. Nous supposerons donc qu'une assemblée de ks membres, formée d'une majorité a et d'une minorité b $(a + b = ks)$, ait à voter sur une proposition, la majorité étant *pour* et la minorité *contre*, et qu'à cet effet l'assemblée se divise par la voie du sort en k sections, dont chacune comptera par conséquent s membres. Nous admettrons, en outre, que les membres soient appelés successivement à émettre leur vote, conformément à une liste, sur laquelle sont inscrits d'abord les membres de la première section, puis ceux de la seconde, et ainsi de suite.

De cette manière, chaque vote reçoit un numéro d'ordre, les s premiers numéros formant la première section, les s suivants la seconde, etc.; et comme chaque vote *pour* ou *contre* a

la même chance pour chacun des numéros d'ordre, tous les différents arrangements, qui sont possibles entre les a votes *pour* et les b votes *contre*, posséderont une probabilité égale. Nous pouvons donc regarder ces arrangements comme des cas d'égale possibilité, et il ne reste plus qu'à calculer: 1°. leur nombre total, 2°. le nombre de ceux qui sont favorables à l'hypothèse $P_{m.n}$; en effet, d'après la définition même de la probabilité mathématique, $P_{m.n}$ est égal au quotient de ces deux nombres.

§ 7. En ce qui concerne le nombre total des différents arrangements possibles entre les a votes *pour* et les b votes *contre*, il est naturellement égal au nombre des permutations entre ks éléments, dont a égaux entre eux et b égaux entre eux. Il est donc:

$$\frac{ks!}{a!\,b!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Quant au nombre des cas favorables, la détermination en est plus difficile. Pour y parvenir, nous prendrons comme point de départ un arrangement favorable particulier, et nous en déduirons par permutation les autres cas favorables. Nous choisirons d'ailleurs ce premier arrangement de telle sorte, que dans les m premières sections les votants *pour* soient en majorité, et dans les n dernières les votants *contre*. Représentons donc par $v_1,\ v_2, \ldots\ v_{m-1},\ v_m,\ v'_1,\ v'_2,\ v'_3, \ldots\ v'_{n-1},\ v'_n$, les demi-différences successives entre la majorité et la minorité dans les différentes sections, de façon que, en général, v_p indique cette demi-différence dans une section votant *pour*, et v'_q dans une section votant contre; soit en outre:

$$V = \tfrac{1}{2}(a-b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

La demi-différence entre la majorité totale et la minorité totale sera alors

$$\sum_1^m v_p - \sum_1^n v'_p = V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

§ 8. Dans ce premier arrangement favorable, considérons maintenant la première section. Celle-ci se compose de $\frac{1}{2}s + v_1$ votants

pour et de $\frac{1}{2}s - v_1$ votants *contre*, qui, par conséquent, peuvent être disposés de

$$\frac{s!}{(\frac{1}{2}s + v_1)!\,(\frac{1}{2}s - v_1)!}$$

manières différentes.

En continuant ainsi, dans toutes les sections suivantes, à permuter les votes aussi souvent que possible, on obtient déjà, pour des valeurs fixes de $v_1,\ v_2,\ v_3, \ldots v_m,\ v'_1,\ v'_2 \ldots v'_n$, un nombre

$$\frac{s!}{(\frac{1}{2}s+v_1)!\,(\frac{1}{2}s-v_1)!} \times \frac{s!}{(\frac{1}{2}s+v_2)!\,(\frac{1}{2}s-v_2)!} \times \frac{s!}{(\frac{1}{2}s+v_3)!\,(\frac{1}{2}s-v_3)!} \times \ldots\ldots$$
$$\times \frac{s!}{(\frac{1}{2}s+v_m)!\,(\frac{1}{2}s-v_m)!} \times \frac{s!}{(\frac{1}{2}s-v'_1)!\,(\frac{1}{2}s+v'_1)!} \times \ldots \times \frac{s!}{(\frac{1}{2}s-v'_n)!\,(\frac{1}{2}s+v'_n)!} \quad (5)$$

de cas favorables différents. Mais, en outre, il est clair que ces grandeurs $v_1 \ldots . v_m,\ v'_1 \ldots . v'_n$ peuvent prendre différentes valeurs. Dès que, dans un arrangement quelconque, il est satisfait à la condition (4), et que de plus on a:

$$0 \leqq v_1,\ v_2, \ldots . v_m,\ v'_1 \ldots \ldots v'_n \leqq \tfrac{1}{2}s, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

cet arrangement appartiendra aux cas possibles et favorables. L'expression (5) devra donc être sommée pour toutes les valeurs $v_1 \ldots v_m,\ v'_1 \ldots . v'_n$, qui satisfont à (4) et à (6).

En supposant cette sommation effectuée, on aura trouvé le nombre des cas favorables qui ont la propriété que les *m premières* sections votent *pour*. Afin de déduire de là le nombre total des arrangements favorables, nous remarquerons que, en permutant entre elles les m sections *pour* et les n sections *contre*, prises dans leur ensemble, on peut les arranger de

$$\frac{k!}{m!\,n!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

manières différentes; de sorte que chacun des cas favorables, où les m premières sections votent *pour*, donne lieu, par un pareil déplacement en bloc de sections entières, à

$$\frac{k!}{m!\,n!}$$

cas favorables différents. On obtient donc:

$$P_{m.n} = \frac{a!\,b!}{ks!}\,\frac{k!}{m!\,n!}\,\Sigma\,\frac{s!}{(\frac{1}{2}s+v_1)!\,(\frac{1}{2}s-v_1)!}\times\ldots\ldots\frac{s!}{(\frac{1}{2}s+v_m)!\,(\frac{1}{2}s-v_m)!}\times$$

$$\times\frac{s!}{(\frac{1}{2}s-v'_1)!\,(\frac{1}{2}s+v'_1)!}\times\ldots\ldots\times\frac{s!}{(\frac{1}{2}s-v'_n)!\,\,(\frac{1}{2}s+v'_n)!};\quad\text{(A)}$$

expression où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs $v_1 \ldots v_m,\ v'_1 \ldots v'_n$, qui satisfont aux deux conditions

$$\sum_1^m v_p - \sum_1^n v'_p = V,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$0 \leqq v_1,\ v_2,\ldots\ldots v_m,\ v'_1\ldots,\ v'_n \leqq \tfrac{1}{2}s;\ \ldots\ldots \quad (6)$$

V ayant pour valeur

$$V = \tfrac{1}{2}(a-b)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

III.

§ 9. L'expression (A), par laquelle nous avons maintenant représenté $P_{m.n}$, renferme beaucoup de produits de coefficients binomiaux, qui tous, à l'exception de $\frac{k!}{m!\ n!}$, contiennent par supposition de grands nombres. Nous devons donc chercher des formules qui donnent, pour de pareils coefficients binomiaux, une valeur approchée.

En premier lieu, nous pouvons faire usage, à cet effet, de la formule connue

$$m! = \sqrt{2\pi m}.m^m.e^{-m}.e^{\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{m} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{m^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{m^5} - \ldots\ldots} \quad .\ .\ (9)$$

On trouve alors pour un coefficient binomial donné

$$\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!} = \frac{\gamma!}{\alpha!\ \beta!} =$$

$$\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\alpha\beta}}.\frac{\gamma^\gamma}{\alpha^\alpha\beta^\beta}.e^{\frac{B_1}{1.2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) - \frac{B_2}{3.4}\left(\frac{1}{\gamma^3}-\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right) + \frac{B_3}{5,6}\left(\frac{1}{\gamma^5}-\frac{1}{\alpha^5}-\frac{1}{\beta^5}\right) - \ldots} \quad (10)$$

et on pourra donc, si α et β ne sont pas des nombres trop petits, poser d'une manière très approchée:

$$\frac{\gamma!}{\alpha!\,\beta!}=\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\alpha\beta}}\,\frac{\gamma^\gamma}{\alpha^\alpha\beta^\beta}=\sqrt{\frac{1}{2\pi\gamma}}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} \quad \ldots \quad (11)$$

Pour réduire encore davantage cette formule, nous introduirons

$$\varepsilon=\alpha-\beta,$$

de sorte que

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(\gamma+\varepsilon),$$
$$\beta=\tfrac{1}{2}(\gamma-\varepsilon);$$

on obtient alors

$$\frac{\gamma!}{\alpha!\,\beta!}=\frac{2^{\gamma+1}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\left(\frac{\gamma}{\gamma+\varepsilon}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\gamma-\varepsilon}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{2^{\gamma+1}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon+1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}(\gamma-\varepsilon+1)}.$$

Mais on a

$$l.\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon+1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}(\gamma-\varepsilon+1)}\right)=$$
$$=-\tfrac{1}{2}(\gamma+\varepsilon+1)\,l\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)-\tfrac{1}{2}(\gamma-\varepsilon+1)\,l\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right);$$

expression pour laquelle nous pouvons écrire

$$-\gamma\left[\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\varepsilon^2}{1.2.\gamma^2}+\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)\frac{\varepsilon^4}{3.4.\gamma^4}+\left(1-\frac{5}{\gamma}\right)\frac{\varepsilon^6}{5.6.\gamma^6}+\text{etc.}\ldots\right];$$

d'où il suit

$$\frac{\gamma!}{\alpha!\,\beta!}=$$
$$=\frac{2^{\gamma+1}}{\sqrt{2\pi\gamma}}.e^{-\gamma\left[\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{(\alpha-\beta)^2}{1.2.\gamma^2}+\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)\frac{(\alpha-\beta)^4}{3.4.\gamma^4}+\left(1-\frac{5}{\gamma}\right)\frac{(\alpha-\beta)^6}{5.6.\gamma^6}+\text{etc.}\ldots\right]} \quad (12)$$

La série, contenue dans cette expression, est, pour des valeurs $\alpha-\beta$ qui sont petites par rapport à γ, très convergente. Pour les coefficients binomiaux dans lesquels α et β diffèrent peu l'un de l'autre, c'est-à-dire, pour les coefficients dits *moyens*, le premier terme seul pourra donc déjà fournir une approximation suffisamment exacte. Il sera donc permis de poser, si γ n'est pas trop petit et que $\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$ soit très petit,

$$\frac{\gamma!}{\alpha!\,\beta!} = \frac{2\gamma+1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{(\alpha-\beta)^2}{2\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

L'erreur commise sera d'ailleurs représentée par

$$1 - e^{\frac{(\alpha-\beta)^2}{1.2.\gamma^2} - \left(1-\frac{3}{\gamma}\right)\frac{(\alpha-\beta)^4}{3.4.\gamma^3} - \left(1-\frac{5}{\gamma}\right)\frac{(\alpha-\beta)^6}{5.6.\gamma^5} - \text{etc.}\ldots}$$

ou, approximativement, par

$$-\frac{(\alpha-\beta)^2}{1.2.\gamma^2} + \frac{(\alpha-\beta)^4}{3.4.\gamma^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

On voit qu'elle devient considérable pour les coefficients extrêmes. Mais ceux-ci sont très petits comparés aux coefficients moyens. La formule (13) peut donc servir, sauf pour les petites probabilités $P_{m.n}$, lesquelles sont composées uniquement de coefficients extrêmes.

A l'aide de cette formule, on trouve

$$P_{m.n} = \frac{k!}{m!\ n!}\sqrt{\left(\frac{2}{\pi s}\right)^{k-1}}\, k\, e^{\frac{2V^2}{ks}} \Sigma\, e^{-\frac{2}{s}\left\{\sum_1^m v_p{}^2 + \sum_1^n v'_p{}^2\right\}}; \quad (B)$$

où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs de $v_1 \ldots v_m$, $v'_1 \ldots v'_2$, qui satisfont aux relations (4) et (6).

Cette formule cesse toutefois d'être applicable lorsque les votants sont peu nombreux, et ce n'est que pour un nombre de votants infini qu'elle tend vers une exactitude absolue.

§ 10. Bien que l'expression (B) doive subir plus loin de nouvelles réductions, nous voulons l'appliquer d'abord à une couple d'exemples simples, et en premier lieu au calcul de $P_{2.0}$ et de $P_{1.1}$.

Deux cas sont ici à distinguer, suivant que V est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}s$. Dans le premier cas, la minorité compte moins de $\frac{1}{2}s$ voix, et il est donc impossible qu'elle obtienne la victoire dans l'une des deux sections, de sorte qu'on devra avoir:

$$P_{2.0} = 1,\ P_{1.1} = 0,\ P_{0.2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Dans le second cas, celui de $V < \frac{1}{2}s$, la formule (B) donne:

$$\left\{\begin{array}{l} P_{2.0} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi s}} e^{\frac{V^2}{s}} \Sigma\, e^{-\frac{2}{s}\left\{v_1{}^2 + v_2{}^2\right\}}, \\[2ex] P_{1.1} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi s}} e^{\frac{V^2}{s}} \Sigma\, e^{-\frac{2}{s}\left\{v_1{}^2 + v'_1{}^2\right\}}; \end{array}\right.$$

où les sommations sont respectivement limitées par les conditions

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = V < \tfrac{1}{2}s, \\ v_1 - v'_1 = V < \tfrac{1}{2}s; \end{cases}$$

et où l'on a, en outre,

$$0 \leqq v_1,\ v_2,\ v'_1 < \tfrac{1}{2}s.$$

On déduit facilement de là, en remplaçant la sommation par l'intégration et en remarquant que, pour $V < \frac{1}{2}s$, $\theta\left(\frac{s-V}{\sqrt{s}}\right)$ peut être pris égal à l'unité:

$$P_{2.0} = \theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right);\quad P_{1.1} = 1 - \theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right);\quad P_{0.2} = 0\ .\ .\ (16)$$

En second lieu, il suit de la formule (B):

$$P_{3.0} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi s} e^{\frac{2V^2}{3s}} \Sigma e^{-\frac{2}{s}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}$$

où la sommation est limitée par les conditions:

$$v_1 + v_2 + v_3 = V,$$
$$0 \leqq v_1,\ v_2,\ v_3 \leqq \tfrac{1}{2}s.$$

Si l'on pose

$$v_2 + v_3 = x,$$

qu'on somme d'abord tous les termes pour lesquels x et par conséquent v_1 possèdent une valeur égale, puis qu'on somme de nouveau ces sommes partielles, on obtient, au moins pour $V < \frac{1}{2}s$, en passant à l'intégration:

$$P_{3.0} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi s} e^{\frac{2V^2}{3s}} \int_0^V e^{-\frac{2}{s}(V-x)^2} dx \int_0^x e^{-\frac{2}{s}(v_2^2 + (x-v_2)^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{\pi s}} \int_0^V e^{-\frac{(2V-3x)^2}{2s}} \theta\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) dx.$$

Cette expression se laisse encore un peu simplifier. On trouve en effet, en différentiant par rapport à V:

$$\frac{d.P_{3.0}}{dV} = \sqrt{\frac{3}{\pi s}}\, e^{-\frac{V^2}{3s}} \theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right) + \sqrt{\frac{3}{\pi s}} \int_0^V \frac{d.e^{-\frac{(2V-3x)^2}{3s}}}{dV} \theta\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) dx.$$

puis successivement:

$$\int_0^V \frac{d.e^{-\frac{(2V-3x)^2}{3s}}}{dV}\,\theta\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)dx =$$

$$= -\int_0^V \frac{4(2V-3x)}{3s}\,e^{-\frac{(2V-3x)^2}{3s}}\,\theta\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^V \theta\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)d.e^{-\frac{(2V-3x)^2}{3s}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

d'où, au moyen de l'intégration par parties, on déduit de nouveau:

$$-\frac{2}{3}\theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right)e^{-\frac{V^2}{3s}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi s}}\int_0^V e^{-\frac{x^2}{s}}\,e^{-\frac{(2V-3x)^2}{3s}}dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right).e^{-\frac{V^2}{3s}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi s}}e^{-\frac{V^2}{3s}}\int_0^V e^{-\frac{(2x-V)^2}{s}}dx \quad . \; . \quad (**)$$

Mais, par la substitution

$$\frac{2x-V}{\sqrt{s}} = t,$$

on obtient

$$\int_0^V e^{-\frac{(2x-V)^2}{s}}dx = \frac{\sqrt{s}}{2}\int_0^{+\frac{V}{\sqrt{s}}} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi s}}{2}\,\theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right),$$

ce qui montre que les expressions (*) et (**) sont égales à *zéro*, de sorte qu'on a

$$\frac{d.P_{3.0}}{dV} = \sqrt{\frac{3}{\pi s}}\,e^{-\frac{V^2}{3s}}\,\theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right);$$

équation d'où par intégration, et en remarquant que pour $V=0$ on a naturellement aussi $P_{3.0}=0$, on tire immédiatement:

$$P_{3.0} = \sqrt{\frac{3}{\pi s}}\int_0^V e^{-\frac{V^2}{3s}}\,\theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right)dV \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

IV.

§ 11. Nous revenons maintenant à la formule (B) et faisons observer que la difficulté à vaincre consiste à calculer

$$\Phi(V) = \Sigma e^{-\frac{2}{s}\left\{\sum_1^m v_p^2 + \sum_1^n v'^2_p\right\}}, \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

où l'on doit sommer sous les conditions (4) et (6); ce signe de fonction étant introduit dans l'expression (B), on trouve en effet:

$$P_{m,n} = \frac{k!}{m!\,n!}\sqrt{\left(\frac{2}{\pi s}\right)^{k-1}}\,.\,h\,.\,e^{\frac{2V^2}{ks}}\,.\,\Phi(V)\,. \quad \ldots\ldots\ldots (C)$$

Mais, au lieu de déterminer la fonction $\Phi(V)$ elle-même, nous considérerons d'abord une autre fonction, en relation intime avec (ΦV).

Si l'on somme

$$\Sigma e^{-\frac{2}{s}\left\{\sum_1^m v_p^2 + \sum_1^n v'^2_p\right\}}, \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

non plus sous la condition (4), mais sous la condition plus générale

$$0 \leqq \sum_1^m v_p - \sum_1^n v'_p \leqq V, \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

en maintenant d'ailleurs la condition (6) et la particularité que les grandeurs $v_1, v_2, \ldots v_m, v'_1 \ldots v'_n$ ne doivent croître que par unités entières, on obtient un autre résultat, que nous représenterons par

$$\psi(V),$$

et qui est lié à $\Phi(V)$ par une relation simple.

Si l'on considère, en effet, que, sous les conditions susdites,

$$\sum_1^m v_p - \sum_1^n v'_p$$

ne peut non plus croître ou décroître que par unités entières, il est évident qu'on a

$$\psi(V) - \psi(V-1) = \Phi(V), \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

équation pour laquelle on peut écrire

$$\Phi(V) = \frac{\psi(V) - \psi(V-1)}{V-(V-1)},$$

ou

$$\Phi(V) = \frac{d.\psi(V)}{d.V}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Avec un peu de réflexion, on reconnaîtra qu'il y a seulement deux cas où la condition nécessaire, pour que cette formule donne une approximation suffisante, n'est pas satisfaite, à savoir: 1° lorsque le nombre des votants est petit; 2° pour des valeurs de V qui, prises absolument, — non par comparaison avec ks, — appartiennent aux petits nombres, et, même dans ce cas, seulement en ce qui concerne la détermination de $P_{k.o}$, laquelle probabilité, toutefois, doit alors être très petite. Pour tous les autres cas, la formule convient très bien. Il ne sera donc pas nécessaire d'indiquer, quant à l'application de cette formule, d'autres motifs d'exception que ceux qui ont déjà été mentionnés précédemment.

§ 12. Pour ce qui regarde maintenant la détermination de $\psi(V)$, nous pouvons y arriver par la méthode de M. Lejeune-Dirichlet, laquelle repose sur une propriété de quelques intégrales définies, dont la valeur est égale à l'unité tant qu'une certaine constante est située entre certaines limites, mais devient *zéro* lorsque cette constante tombe en dehors de ces limites.

A ces intégrales appartient

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2t-C)u\sqrt{-1}} \cdot \frac{\operatorname{Sin} Cu}{u} \cdot du; \quad \ldots \quad (23)$$

aussi longtemps, en effet, que la constante t est plus grande que zéro et plus petite que C, $f(t)$ est égale à l'unité; si au contraire t est négative, ou positive mais plus grande que C, $f(t)$ est exactement *zéro*.

Substituons maintenant

$$t = \sum_1^m v_p - \sum_1^n v_p',$$

et

$$C = V;$$

alors

$$\left.\begin{aligned} & f\left(\sum_1^m v_p - \sum_1^n v_p'\right) = \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(2\sum_1^m v_p - 2\sum_1^n v'_p - V\right)u\sqrt{-1}} \cdot \frac{\operatorname{Sin} Vu}{u} \cdot du \end{aligned}\right\} \quad . . (24)$$

représentera une fonction qui devient *zéro* aussitôt que les grandeurs $v_1 \ldots v_m$, $v'_1 \ldots v'_n$ ne satisfont plus à la condition (20), mais qui reste égale à l'unité tant que cette condition est remplie. Si donc on multiplie par cette fonction l'expression (19), en dedans du signe de sommation, on sera affranchi des conditions restrictives (20), et il n'y aura plus à tenir compte que de la condition (6).

En passant alors de la sommation à l'intégration, on trouve

$$\left.\begin{aligned} & \psi(V) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}s}\int_0^{\frac{1}{2}s}\int_0^{\frac{1}{2}s} \cdots \\ & \cdots\int_0^{\frac{1}{2}s}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{s}\left\{\sum_1^m v_p^2 + \sum_1^n v'^2_p\right\} + \left(2\sum_1^m v_p - 2\sum_1^n v'_p - V\right)u\sqrt{-1}} \\ & \cdot \frac{\operatorname{Sin} Vu}{u}\, dv_1 dv_2 dv_3 \ldots dv'_n . du \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Comme d'ailleurs, dans la formule (25), l'expression qui doit être intégrée ne peut pas prendre, entre les limites de l'intégration, une valeur infinie, il sera permis de modifier à volonté l'ordre des intégrations. On pourra donc écrire:

$$\left.\begin{aligned} & \psi(V) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}s}\int_0^{\frac{1}{2}s}\int_0^{\frac{1}{2}s} \cdots \\ & \int_0^{\frac{1}{2}s} e^{-\frac{2}{s}\left\{\sum_1^m v_p^2 + \sum_1^n v'^2_p\right\} + \left(2\sum_1^m v_p - 2\sum_1^n v'_p - V\right)u\sqrt{-1}} \\ & \cdot \frac{\operatorname{Sin} Vu}{u} du . dv_1 dv_2 dv_3 \ldots . dv'_n ; \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

et si l'on transporte aussi loin que possible à gauche les différents facteurs en lesquels peut être décomposée l'expression qu'il s'agit d'intégrer, qu'on remarque que les différentes inté-

grations, sauf celle par rapport à u, deviennent indépendantes l'une de l'autre; enfin, qu'on introduise

$$X(u) = \int_0^{\frac{1}{2}s} e^{-\frac{2v^2}{s} + 2v.u\sqrt{-1}}\, dv \quad \ldots\ldots (27)$$

on trouve:

$$\psi(V) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{X(u)\}^m \{X(-u)\}^n . e^{-Vu\sqrt{-1}} \frac{\sin Vu}{u} du. \quad (28)$$

d'où il suit aussitôt:

$$\Psi(V) = \frac{d\psi(V)}{dV} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{X(u)\}^m \{X(-u)\}^n . e^{-2Vu\sqrt{-1}} du. (29)$$

ou finalement, par substitution dans (C),

$$\left.\begin{array}{l} P_{m.n} = \frac{1}{\pi} \frac{k!}{m!\ n!} \\ \sqrt{\left(\frac{2}{\pi s}\right)^{k-1}} .k.e^{\frac{2V^2}{ks}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{X(u)\}^m \{X(-u)\}^n e^{-2Vu\sqrt{-1}} du. \end{array}\right\} \quad (D)$$

§ 13. Il nous reste maintenant encore à déterminer $X(\pm u)$, intégrale pour laquelle on peut écrire, sans erreur notable,

$$X(\pm u) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{2v^2}{s} \pm 2vu\sqrt{-1}} . dv \quad \ldots\ldots\ldots (V)$$

En introduisant ici, comme nouvelle variable,

$$t = v\sqrt{\frac{2}{s}} \pm u\sqrt{\frac{s}{2}} . \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots\ldots (VI)$$

on trouve sans peine:

$$X(\pm u) = \sqrt{\frac{s}{2}} . e^{-\frac{su^2}{2}} \int_{\mp u\sqrt{\frac{s}{2}}.\sqrt{-1}}^{\infty} e^{-t^2} . dt = \sqrt{\frac{\pi s}{2}} . e^{-\frac{su^2}{2}} \left(\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\, \theta'\left(u\sqrt{\frac{s}{2}}\right)\right) \quad (30)$$

où nous avons fait usage de la notation:

$$\theta'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{+x^2} dx = \frac{\theta(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots (31)$$

Par la substitution de (30) dans la formule (D), on obtient alors:

$$\left.\begin{array}{l} P_{m.n} = \sqrt{\frac{ks}{2\pi}} \cdot \frac{k!}{m!\,n!} \cdot e^{\frac{2V^2}{ks}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ksu^2}{2}} \\ \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\theta'\left(u\sqrt{\frac{s}{2}}\right)\right]^m \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\theta'\left(u\sqrt{\frac{s}{2}}\right)\right]^n e^{-2Vu\sqrt{-1}}du; \end{array}\right\} \quad (E)$$

expression qui nous donne enfin, sous la forme d'une intégrale définie, la probabilité demandée.

§ 14. Au moyen de réductions très simples, on peut encore, de la formule (E) pour la probabilité $P_{m.n}$, déduire quelques autres expressions, qui ont chacune, comme on le verra plus loin, leurs avantages propres.

En premier lieu, on obtient une légère simplification en substituant

$$t = u\sqrt{\frac{s}{2}}, \quad R = V\sqrt{\frac{2}{s}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} P_{m.n} = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot \frac{k!}{m!\,n!}\, e^{\frac{R^2}{k}} \times \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1}\right]^m\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1}\right]^n e^{-2Rt\sqrt{-1}}\,dt \end{array}\right\} \quad (F)$$

Si l'on fait alors usage, en outre, des notations

$$\varrho = \sqrt{1+(\theta'(t))^2}, \qquad tg\,\Phi = \theta'(t), \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

par suite desquelles on a:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\varrho\,(Cos\,\Phi + \sqrt{-1}.\,Sin\,\Phi),$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\varrho\,(Cos.-\Phi + \sqrt{-1}.\,Sin.-\Phi),$$

la formule devient:

$$P_{m.n} = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot \frac{k!}{m!\,n!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k e^{\frac{R^2}{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2}\varrho^k.$$
$$(Cos\,\Phi + Sin\,\Phi\sqrt{-1})^m(Cos.-\Phi + Sin.-\Phi\sqrt{-1})^n e^{-2Rt\sqrt{-1}}\,dt.$$

Si l'on applique ici le théorème de Moivre, la partie imaginaire de la formule disparaît spontanément. comme étant une intégrale symétrique, dans laquelle la moitié négative détruit la moitié positive; on trouve ainsi:

$$P_{m.n} = 2\sqrt{\frac{k}{\pi}}.\frac{k!}{m!\,n!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k . e^{\frac{R^2}{k}}\int_0^\infty e^{-kt^2} . \varrho^k . Cos\,\{(m-n)\Phi - 2Rt\}\,dt;$$

ou, en chassant de la formule les notations (33):

$$\left.\begin{array}{l} P_{m.n} = 2\sqrt{\frac{k}{\pi}}.\frac{k!}{m!\,n!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k . e^{\frac{R^2}{k}}\int_0^\infty e^{-kt^2}. \\ .\sqrt{(1+(\theta'(t))^2)^k} . Cos\,\{(m-n).Bg\,tg[\theta'(t)] - 2Rt\}\,dt, \end{array}\right\}\ (G)$$

expression dans laquelle il ne reste plus aucune forme imaginaire.

§ 15. En second lieu, nous pouvons dans la formule (F) faire passer le facteur $e^{\frac{R^2}{k}}$ sous le signe d'intégration, et multiplier l'une par l'autre les différentes puissances de e. Le nouvel exposant de e est alors précisément un carré, de sorte qu'on obtient:

$$P_{m.n} = \sqrt{\frac{k}{\pi}}.\frac{k!}{m!\,n!} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1}\right)^m\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1}\right)^n e^{-k\left(t+\frac{R}{k}.\sqrt{-1}\right)^2}dt.$$

La substitution

$$t\sqrt{k} + \frac{R}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1} = z, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

donne ensuite

$$\left.\begin{array}{l} P_{m.n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{k!}{m!\,n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\theta.\left(\frac{R}{k}-\frac{z}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1}\right)\right]^m \times \\ \left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\theta.\left(\frac{R}{k}-\frac{z}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1}\right)\right]^n e^{-z^2}dz, \end{array}\right\}\ (H)$$

expression qui possède, comme on le reconnaîtra tout à l'heure, des avantages tout spéciaux pour la discussion.

V.

§ 16. Après toutes les réductions que nous avons fait subir à la formule (A), il ne paraîtra sans doute pas superflu de soumettre le résultat obtenu à quelques épreuves, qui nous donneront d'ailleurs une idée plus nette de la nature des différentes formes intégrales.

Une première vérification est fournie par la remarque évidente que la relation

$$\sum_{n=0}^{n=k} P_{m.n} = P_{k.0} + P_{k-1.1} + \ldots + P_{m.n} + \ldots + P_{0.k} = 1 \quad . \quad . \quad (35)$$

doit être satisfaite identiquement, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs de V; or, cela ressort manifestement de la formule (H).

En second lieu, il est clair que pour $R = \infty$, c'est-à-dire, pour une majorité toute-puissante, les probabilités $P_{m.n}$ doivent toutes devenir *zéro*, sauf la première $P_{k.0}$, qui correspond au cas où la majorité triomphe dans toutes les sections. Cette probabilité doit alors devenir égale à l'unité.

Or, on a par définition:

$$\theta\left(\frac{R}{k} - \frac{z}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R}{k} - \frac{z}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{-1}} e^{-z^2}\, dz,$$

par conséquent

$$lim\,(\mathrm{R} = \infty).\theta\left(\frac{R}{k} - \frac{z}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty - \frac{z}{k}.\sqrt{-1}} e^{-z^2}\, dz,$$

ou, attendu qu'on peut maintenant prendre ∞ pour la limite supérieure,

$$lim\,(R=\infty).\theta\left(\frac{R}{k}-\frac{z}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=1. \quad (36)$$

Il résulte de là que les expressions $P_{m.n}$ doivent devenir zéro lorsqu'elles contiennent le facteur

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}.\theta\left(\frac{R}{k}-\frac{z}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1}\right).$$

Or, cela est le cas pour toutes, à l'exception de $P_{k.0}$; et, quant à cette dernière grandeur, puisque

$$lim\,(R=\infty)\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,\theta\left(\frac{R}{k}-\frac{z}{\sqrt{k}}.\sqrt{-1}\right)=1,$$

on a nécessairement

$$P_{k.0}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=1.$$

Ici encore, la formule (H) satisfait donc à la condition qu'on pouvait poser *à priori.*

§ 17. Une troisième épreuve concerne la valeur de $P_{1.0}$. Cette probabilité se rapporte au cas où l'on ne forme qu'une seule section, en d'autres termes, au cas où les votants ne se partagent pas en sections; et comme, dans cette hypothèse, la majorité doit nécessairement triompher, on a identiquement

$$P_{1.0}^{+R}=1,$$

et de même identiquement

$$P_{1.0}^{-R}=0;$$

de sorte que la probabilité doit changer subitement de valeur pour $R=0$.

C'est de nouveau la formule (H) qui se prête le mieux à subir l'épreuve de ces prévisions. D'après cette formule, on a en effet:

$$P_{1.0}^{+R}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta\,(R-z.\sqrt{-1}).e^{-z^2}\,dz.$$

La première de ces intégrales est connue, et tout se réduit donc à calculer la seconde. En représentant celle-ci par I, on a provisoirement

$$P_{1.0}^{+R} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} . I,$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\,(R - z\sqrt{-1})\, e^{-z^2} dz \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Si maintenant l'on différentie l'expression I par rapport à R, on obtient pour le quotient différentiel une expression très simple, il est vrai, mais dont la valeur est entièrement indéterminée. En posant, toutefois,

$$F(R) = \int_{-x}^{+x} \theta\,(R - z.\sqrt{-1}).\, e^{-z^2} dz, \quad \ldots . \quad (38)$$

on a

$$I = lim\,(x = \infty) . F(R); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

mais on a alors aussi

$$\frac{d.F(R)}{dR} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} . \frac{e^{-R^2}}{R} . Sin\, 2Rx,$$

et par suite

$$F(R) - F(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^R \frac{e^{-R^2}}{R} . Sin\, 2Rx . dR.$$

Or, il est évident qu'on a

$$F(0) = \int_{-x}^{+x} \theta.(-z\sqrt{-1}).e^{-z^2} dz = -\sqrt{-1}.\int_{-x}^{+x} \theta'(z).e^{-z^2} dz = 0, \; (40)$$

par conséquent

$$F(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+R} \frac{e^{-R^2}}{R} . Sin\, 2Rx . dR, \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

équation pour laquelle, en faisant

$$2Rx = y,$$

on peut aussi écrire:

$$F(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+2Rx} e^{-\frac{y^2}{4x^2}} . \frac{Sin . y}{y} . dy \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Cette expression, qui en général dépend de R, devient au contraire indépendante de cette grandeur pour $x = \infty$; car on trouve alors (voir (39)):

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{Sin\, y}{y} . dy = \sqrt{\pi}, \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

et on obtient donc effectivement:

$$P_{1.0}^{+R} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} I = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Pour les valeurs négatives de R, on a au contraire

$$F(-R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-2Rx} e^{-\frac{y^2}{4x^2}} . \frac{Sin\ y}{y}\, dy,$$

ou, si on laisse devenir $x = \infty$,

$$I = -\sqrt{\pi},$$

de sorte qu'on trouve

$$P_{1.0}^{-R} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} . I = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Encore une fois, l'accord est donc parfait entre le raisonnement et le calcul.

§ 18. Avant de passer à d'autres épreuves, nous déduirons — cette fois de la formule (F) — une équation différentielle très importante. La formule en question conduit facilement à l'équation:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dP_{m.n}}{dR} = \dfrac{2R}{k} . P_{m.n} - \dfrac{k-1!}{m!\, n!} \sqrt{\dfrac{k}{\pi}} . e^{\frac{R^2}{k}} \sqrt{-1}. \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1}]^m [\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1}]^n . e^{-2Rt\sqrt{-1}}\, d.e^{-kt^2}. \end{array}\right\} (44)$$

En appliquant à la dernière intégrale l'intégration par parties, le premier terme s'évanouira, attendu qu'on a

$$lim.\frac{\theta'(t)}{e^{t^2}}=0$$

pour $t=\infty$; on obtient alors sans peine:

$$\frac{d.P^R_{m.n}}{dR}=\sqrt{\frac{k}{\pi(k-1)}}e^{-\frac{R^2}{k(k-1)}}\left(P^R_{m-1.n}-P^R_{m.n-1}\right), \quad . \; . \; (45)$$

formule d'où découle immédiatement:

$$P^R_{m.n}-P^0_{m.n}=\sqrt{\frac{k}{\pi(k-1)}}\int_0^R e^{-\frac{R^2}{k.(k-1)}}\left(P^R_{m-1.n}-P^R_{m.n-1}\right)dR. \quad (K)$$

Tant la forme (45) que l'expression (K) devront subir quelques modifications dans le cas de $n=0$, $m=k$; car le facteur $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta'(t).\sqrt{-1})$ disparaît alors de la formule (F). Il est toutefois superflu de développer ici les calculs relatifs à ce cas, attendu qu'ils s'exécutent exactement de la même manière. Nous nous contenterons donc d'en donner les résultats, à savoir:

$$-\frac{d.P^R_{k.0}}{dR}=\sqrt{\frac{k}{\pi(k-1)}}e^{-\frac{R^2}{k(k-1)}}P^R_{k-1.0}, \quad . \; . \; . \; . \; (46)$$

et par conséquent aussi:

$$P^R_{k.0}=\sqrt{\frac{k}{\pi(k-1)}}\int_0^R e^{-\frac{R^2}{k(k-1)}}P^R_{k-1.0}dR, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (L)$$

puisque $P^0_{k.0}$ est identiquement *zéro*.

§ 19. Les formules (K) et (L) peuvent maintenant être utilisées pour une nouvelle vérification, qui consistera à calculer $P_{2.0}$, $P_{1.1}$, $P_{3.0}$, expressions pour lesquelles des valeurs ont déjà été trouvées antérieurement (voir les form. (16) et (17)). On déduit immédiatement de (L):

$$P_{2.0}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}R^2}.P^R_{1.0}dR=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}R^2}dR=\theta\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right),$$

ou, en ayant égard à la signification de R, indiquée par la formule (32),

$$P_{2.0} = \theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right).$$

De (K) on déduit ensuite:

$$P^R_{1.1} - P^0_{1.1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}R^2}\left(P^R_{0.1} - P^R_{1.0}\right) dR.$$

Mais, par la nature même de la question, on a:

$$P^0_{1.1} = 1;\ P^R_{0.1} = 0;\ P^R_{1.0} = 1;$$

de sorte qu'on obtient:

$$P^R_{1.1} = 1 - \theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right).$$

Ces résultats sont tous les deux conformes à (16).

Enfin, il suit de (L):

$$P^R_{3.0} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int_0^R e^{-\frac{1}{6}R^2}.\theta\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)dR = \sqrt{\frac{3}{\pi s}}\int_0^V e^{-\frac{V^2}{3s}}\,\theta\left(\frac{V}{\sqrt{s}}\right) dV,$$

ce qui est également en concordance avec (17).

§ 20. En dernier lieu, nous démontrerons l'exactitude de l'équation différentielle (45) en la déduisant directement des principes du calcul des probabilités, suivant une méthode qui nous a été obligeamment indiquée par M. Schols. Voici, dans ses développements essentiels, cette ingénieuse démonstration, telle qu'elle nous a été communiquée par lui.

Qu'on se représente connue l'opinion de tous les votants, à l'exception d'un seul: a appartenant à la majorité, $b-1$ à la minorité, et un étant indécis. Si alors nous désignons par V la demi-différence entre a et $b-1$, la probabilité d'un partage en m bureaux votant *pour* et n bureaux votant *contre* devra être représentée par

$$P^{V+\frac{1}{2}}_{m.n}$$

si le votant douteux se joint à la majorité, mais par

$$P^{V-\frac{1}{2}}_{m.n}$$

s'il se rallie à la minorité.

Entre les a votants *pour*, les b votants *contre* et le votant douteux, il y a maintenant

$$\frac{ks!}{a!\,\overline{b-1}!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

permutations possibles, qui peuvent être considérées comme des cas de probabilité égale. La plus grande partie de ces cas sont ou bien favorables ou bien défavorables à la supposition $P_{m.n}$, *quel que soit* le parti auquel s'arrête le votant douteux, qu'il vote *pour*, ou qu'il vote *contre*. Pour un certain nombre de permutations, toutefois, l'influence de cette voix unique est suffisante pour changer le cas de favorable en défavorable, ou vice-versâ; or, ce sont ces cas qui produisent la différence entre $P_{m.n}^{V+\frac{1}{2}}$ et $P_{m.n}^{V-\frac{1}{2}}$, et nous allons en conséquence chercher à en déterminer le nombre.

A cet effet, nous remarquerons d'abord que la voix douteuse, — s étant *impair*, — ne pourra faire pencher la balance de son côté que si, dans la section dont elle fait partie, il y a tout juste $\frac{1}{2}(s-1)$ votants *pour*, et par conséquent aussi $\frac{1}{2}(s-1)$ votants *contre*. Le nombre des cas, également probables, où cette circonstance se présente, est facile à calculer. Il est exprimé par:

$$k \cdot \frac{s!}{\overline{\tfrac{1}{2}(s-1)}!\;\overline{\tfrac{1}{2}(s-1)}!} \cdot \frac{(k-1)\,s!}{\overline{a-\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}}!\;\overline{b-\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}}!}; \quad \ldots \quad (48)$$

en effet, partant d'un cas unique, dans lequel la condition est remplie, on peut, sans troubler cette condition, permuter les votants

$$\frac{s!}{\overline{\tfrac{1}{2}(s-1)}!\;\overline{\tfrac{1}{2}(s-1)}!}$$

fois dans la section où se trouve la voix douteuse, et

$$\frac{(k-1)\,s!}{\overline{a-\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}}!\;\overline{b-\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}}!}$$

fois en dehors de cette section; tandis que, en outre, la voix douteuse peut entrer dans chacune des k sections.

Mais il s'en faut de beaucoup que *tous* les cas (48) puissent de favorables devenir contraires, selon que la voix douteuse vote *pour* ou *contre*. Celle-ci ne pourra exercer une pareille influence que lorsque, des $k-1$ autres sections, ou bien $m-1$ ou bien m appartiennent au groupe *pour*, et par conséquent n ou $n-1$ au groupe *contre*; seulement alors, en effet, le vote émis par la section douteuse pourra, oui ou non, élever le nombre des sections *pour* à m, ou le maintenir, oui ou non, à m.

Considérons maintenant en premier lieu les cas où, des $k-1$ autres sections, il y en a $m-1$ dans lesquelles triomphe la majorité, et n qui donnent l'avantage à la minorité. Le nombre de ces cas se trouvera, évidemment, en multipliant le nombre total (48) par la probabilité que $(k-1)s$ votants, dont $a-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}$ *pour* et $b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}$ *contre*, se partagent de telle sorte en $(k-1)$ sections, que $m-1$ de celles-ci votent pour et n contre. Or, si l'on remarque que la demi-différence entre la majorité et la minorité est alors de nouveau $\frac{1}{2}(a-b+1)$, on voit que la probabilité en question est exprimée par

$$P^{V}_{m-1\,.\,n},$$

et le nombre des cas cherchés par

$$k\,.\,\frac{s!}{\frac{1}{2}(s-1)!\;\frac{1}{2}(s-1)!}\,.\,\frac{(k-1)\,s!}{a-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}!\;a-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}!}\,.\,P^{V}_{m-1\,.\,n}\,. \qquad (49)$$

Tous ces cas deviendront favorables si la voix douteuse vote *pour*, défavorables si elle vote *contre*. Ils appartiennent donc à la probabilité $P^{V+\frac{1}{2}}_{m\,.\,n}$, et *non* à la probabilité $P^{V-\frac{1}{2}}_{m\,.\,n}$.

En revanche, le nombre des cas où, des $k-1$ autres sections, m votent *pour* et $n-1$ *contre*, est représenté par

$$k\,.\,\frac{s!}{\frac{1}{2}(s-1)!\;\frac{1}{2}(s-1)!}\,.\,\frac{(k-1)\,s!}{a-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}!\;b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}!}\,.\,P^{V}_{m.n-1}, \qquad (50)$$

et ces cas deviennent favorables si la voix douteuse vote *pour*, défavorables si elle vote *contre*. Ils appartiennent donc à

$P^{V-\frac{1}{2}}_{m.n}$, et *non* à $P^{V+\frac{1}{2}}_{m.n}$; et comme ces deux probabilités possèdent en commun tous les autres cas favorables, la différence entre (49) et (50) exprimera l'excès du nombre des cas favorables de $P^{V+\frac{1}{2}}_{m.n}$ sur celui des cas favorables de $P^{V-\frac{1}{2}}_{m.n}$. Si l'on observe maintenant que dans l'une et l'autre de ces probabilités le nombre des cas favorables doit être divisé par l'expression (47), il sera évident qu'on a:

$$\left.\begin{aligned} & P^{V+\frac{1}{2}}_{m.n} - P^{V-\frac{1}{2}}_{m.n} = \\ & = \frac{k\dfrac{s!}{\frac{1}{2}(s-1)!\,\frac{1}{2}(s-1)!}\cdot\dfrac{(k-1)\,s!}{\overline{a-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}!\ \overline{b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}!}}{\dfrac{ks!}{a!\,\overline{b-1}!}}\left(P^{V}_{m-1.n}-P^{V}_{m.n-1}\right), \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

relation qui est valable pour un petit et pour un grand nombre de votants, mais avec la restriction que s soit *impair*.

§ 11. Pour simplifier davantage, nous écrivons cette formule (51) d'abord sous la forme

$$\left.\begin{aligned} & P^{V+\frac{1}{2}}_{m.n} - P^{V-\frac{1}{2}}_{m.n} = \\ & = \frac{\dfrac{\overline{s-1}!}{\frac{1}{2}(s-1)!\,\frac{1}{2}(s-1)!}\cdot\dfrac{(k-1)\,s!}{\overline{a-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}!\,\overline{b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}!}}{\dfrac{\overline{ks-1}!}{a!\,\overline{b-1}!}}\left(P^{V}_{m-1.n}-P^{V}_{m.n-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

de manière qu'elle ne contienne pour facteurs que des coefficients binomiaux; ensuite nous appliquons la formule d'approximation (13), qui nous donne, — mais seulement pour de grands nombres de votants, —

$$\frac{P^{V+\frac{1}{2}}_{m.n} - P^{V-\frac{1}{2}}_{m.n}}{1} = \frac{d.P^{V}_{m.n}}{dV} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(ks-1)}{\pi\,(k-1)\,(s-1)\,s}}\, e^{-\frac{2\,(s-1)\,V^2}{(k-1).s.(ks-1)}}\left(P^{V}_{m-1.n} - P^{V}_{m.n-1}\right),$$

ou, du moins lorsque s n'est pas trop petit,

$$\frac{d \cdot P^{V}_{m.n}}{dV} = \sqrt{\frac{2k}{\pi(k-1)s}}\, e^{-\frac{2V^2}{k(k-1)s}} \left(P^{V}_{m-1.n} - P^{V}_{m.n-1}\right),$$

expression qui, à l'aide de (32), se transforme en celle-ci:

$$\frac{d \cdot P^{R}_{m.n}}{dR} = \sqrt{\frac{k}{\pi(k-1)}}\, e^{-\frac{R^2}{k(k-1)}} \left(P^{R}_{m-1.n} - P^{R}_{m.n-1}\right),$$

laquelle est identique à (45).

NOTE ADDITIONNELLE.

Bien que ce qui précède puisse être considéré, jusqu'à un certain point, comme un ensemble complet, — puisque les formules (F)—(H) fournissent une solution algébrique qui satisfait à toutes les conditions, et qui devient indubitablement d'autant plus approchée que les votants sont plus nombreux, pour être enfin théoriquement exacte dans l'hypothèse d'un nombre infini de votants, — il reste d'un autre côté encore beaucoup à faire, comme j'espère pouvoir le montrer plus tard. Il faudra tâcher surtout d'arriver à des évaluations numériques. Une méthode générale pour le calcul de l'intégrale (G) devra être cherchée. Pour les cas les plus simples, de *trois*, *quatre*, *cinq* sections, il y aura à établir des séries convergentes propres au calcul des différentes valeurs de $P_{m.n}$. De plus, une attention spéciale devra être accordée aux probabilités $P^{0}_{m.n}$, c'est-à-dire, aux probabilités des différents partages possibles en sections votant *pour* et en sections votant *contre*, dans le cas remarquable où les partis sont de force numérique égale. Enfin, il conviendrait de donner,

pour un ou plusieurs cas, la discussion détaillée des résultats numériques, éclaircie au moyen de représentations graphiques. Ici, nous voulons seulement appeler provisoirement l'attention sur une loi qui découle immédiatement de nos formules. Toutes les formules (F)—(H) montrent, en effet, que la probabilité $P_{m\,n}$ dépend exclusivement de R, c'est-à-dire, du rapport entre la demi-différence V des votants *pour* et *contre* et la racine carrée du nombre de votants dans chaque section. Cette loi peut être formulée ainsi:

Pour un nombre donné de sections et un grand nombre de votants, les probabilités des différents partages possibles en sections votant pour et en sections votant contre restent les mêmes, tant que la différence entre la majorité et la minorité varie proportionnellement à la racine carrée du nombre total des votants.

En d'autres termes, si le nombre des votants augmente, il suffit que la différence entre la majorité et la minorité augmente en raison de la racine carrée, pour que les probabilités n'éprouvent aucune variation. Cette différence devient donc alors une fraction graduellement décroissante du nombre des votants. Or, en admettant initialement une différence suffisamment grande entre la majorité et la minorité, il est clair qu'on peut rendre la probabilité d'un résultat homogène du vote aussi voisine de l'unité qu'on le veut. Si alors on augmente le nombre total des votants, et que la probabilité en faveur d'un pareil résultat reste la même, la différence entre la majorité et la minorité deviendra, par rapport au nombre des votants, une fraction de plus en plus petite, qu'on pourra faire approcher de *zéro* autant qu'on le voudra.

Une majorité qui, exprimée en tant pour cent, surpasse la minorité aussi peu qu'on le veut, suffira, si le nombre des votants est assez grand, pour donner au résultat homogène du vote des sections une probabilité qui approche de l'unité autant qu'on le voudra.

Lorsque la majorité et la minorité sont exactement de même force, on a $R = 0$, et bien qu'alors, — comme nous le ferons voir plus tard, — il ne soit pas permis, sans examen ultérieur, de substituer simplement $R = 0$ dans les formules (F)—(H), pour calculer $P^0_{m.n}$, on n'en a pas moins $P^0_{m.n} = lim.\ P^R_{m.n}$, et par suite $P^0_{m.n}$ est indépendant du nombre des votants.

Si les deux partis sont de force numérique égale, et qu'il y ait un nombre suffisant de votants, les probabilités des différents partages possibles en sections votant pour et en sections votant contre sont des nombres constants, à condition seulement que le nombre des sections reste le même.

Cette loi ne subsiste pas pour de petits nombres de votants; il faut donc l'entendre en ce sens, que les probabilités susdites sont en réalité un peu variables avec le nombre total des votants, mais tendent rapidement vers une limite fixe, qui théoriquement n'est atteinte que pour des votants en nombre infini.

Breda, 11 Avril 1875.

SUR

L'HYDRURE CUIVREUX,

PAR

W. K. J. SCHOOR.

En 1845 M. Wurtz découvrit la combinaison du cuivre et de l'hydrogène. Le procédé qu'il a indiqué pour la préparation de cette substance n'est pas d'une exécution commode, et la combinaison sèche est très inconstante, car elle se décompose déjà à 55° C. Cette circonstance est un obstacle à l'emploi de l'hydrure cuivreux comme source d'hydrogène naissant dans diverses réactions.

Par hasard, j'ai trouvé un nouveau mode de préparation, qui se distingue par une facilité beaucoup plus grande. Quand on ajoute au métal zinc, avec l'acide sulfurique dilué, une solution de sulfate de cuivre, la réaction commence aussitôt et l'hydrure cuivreux se forme.

Après qu'on a filtré et lavé la substance, elle se présente sous l'aspect d'une poudre brune, qui dégage, quand on y ajoute de l'eau pure, du gaz hydrogène.

La réaction sur l'acide chlorhydrique est très remarquable et énergique. Le gaz hydrogène qui se dégage est abondant et d'une pureté parfaite. Le corps en dissolution dans l'acide chlorhydrique est le chlorure cuivreux. On peut précipiter l'hydrate d'oxydule de cuivre à l'état d'une poudre jaune.

Le résultat obtenu me fait conclure que la substance formée de la manière décrite est l'hydrure cuivreux $Cu_2 H_2$.

NOTE

SUR LE

MOUVEMENT ELLIPTIQUE,

PAR

G. F. W. BAEHR.

On sait qu'un point matériel, attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance, décrit une ellipse dont le centre d'attraction est un des foyers, quand sa vitesse initiale v_0 ne passe pas par ce centre et est moindre que la vitesse v_1 qu'il aurait au centre s'il y tombait librement avec une accélération constante et égale à celle de l'attraction dans sa position initiale.

L'équation de cette ellipse par rapport à ses axes principaux est

$$\frac{x^2}{\frac{\mu^2}{C^2}} + \frac{y^2}{\frac{C_1^2}{C}} = 1,$$

où μ est l'accélération de l'attraction à l'unité de distance; du théorème des forces vives on déduit pour la constante C

$$C = \frac{2\mu}{r_0} - v_0^2,$$

r_0 étant le rayon vecteur initial, tandis que le théorème des aires donne pour la constante C_1

$$C_1 = r_0\, v_0\, Sin\, \beta,$$

en désignant par β l'angle entre les directions de r_0 et de v_0.

Initialement l'accélération de l'attraction est

$$\frac{\mu}{r_0^2},$$

et l'on a pour la vitesse v_1, désignée ci-dessus,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \text{d'où } \mu = \tfrac{1}{2} r_0 v_1^2.$$

Si l'on introduit v_1 au lieu de μ, on trouve pour les demi-axes de l'ellipse

$$\frac{\mu}{C} = a = \frac{r_0 v_1^2}{2(v_1^2 - v_0^2)}, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C}} = b = \frac{r_0 v_0 \operatorname{Sin} \beta}{\sqrt{(v_1^2 - v_0^2)}},$$

et par conséquent

$$\frac{a \operatorname{Sin} \beta}{b} = \frac{v_1^2}{2 v_0 \sqrt{(v_1^2 - v_0^2)}},$$

ce qui, dans la supposition de $v_0 < v_1$, est toujours plus grand que l'unité, en sorte que a est le demi-grand axe passant par le foyer et dont la longueur est indépendante de la direction de v_0. Toutes les trajectoires elliptiques, décrites autour du même centre d'attraction, avec des vitesses initiales égales mais de directions différentes, ont des grands axes égaux mais dirigés différemment.

On déduit de ce qui précède une construction géométrique très-simple pour la trajectoire.

Supposons premièrement $\beta = 90^c$, c'est-à-dire que la vitesse initiale soit perpendiculaire au rayon vecteur, dont la direction sera alors la direction du grand axe. La vitesse initiale v_0 étant donnée, on peut considérer comme connu le rapport de cette vitesse à la vitesse v_1, et représenter ces deux quantités par deux droites quelconques qui sont entre elles dans ce rapport.

Soit ainsi, fig. 1 Pl. III, S le centre d'attraction, P la position initiale du mobile attiré, PA, perpendiculaire à SP. la direction de v_0, et représentons cette vitesse par $SP = r_0$. Si alors on décrit du centre S, avec la droite qui d'après le rapport connu doit représenter v_1, un arc de cercle qui coupe PA en B; qu'on prolonge la perpendiculaire PC sur SB jusqu'à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire SD sur SP en D, et qu'enfin on mène par D une parallèle à BS jusqu'à ce qu'elle rencontre le prolongement de PS en P', alors P' sera l'autre sommet, et PP' le grand axe de l'ellipse.

En effet, on voit dans la figure que l'on a

$$PB^2 : BS^2 = BC : BS = PS : PP'$$

ou

$$v_1^2 - v_0^2 : v_1^2 = r_0 : PP',$$

donc $PP' = 2a$.

Connaissant le grand axe et l'un des foyers, le reste s'en déduit immédiatement; le milieu M de PP' est le centre, MS l'excentricité, et par conséquent, dans ce cas où v_0 est perpendiculaire à r_0, SD sera la longueur du demi-petit axe.

L'analyse donne pour le temps T d'une révolution,

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}},$$

mais, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{a}{\mu} = \frac{2a}{r_0 v_1^2} = \frac{1}{v_1^2 - v_0^2},$$

de sorte quc l'on peut écrire

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{(v_1^2 - v_0^2)}}.$$

ce qui montre que le temps de révolution est le même que celui d'un mobile, qui se meut dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, avec une vitesse uniforme représentée par PB.

Dans la figure, on voit que le centre de l'ellipse coïncidera avec le centre S de l'attraction, ou que la trajectoire sera un cercle, quand l'angle $BSP = 45°$, donc quand $v_0^2 = \frac{1}{2} v_1^2$. Le centre d'attraction sera le foyer le plus rapproché ou le plus éloigné du sommet initial, suivant que l'angle BSP est plus petit ou plus grand que $45°$, ou v_0^2 plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2} v_1^2$.

Si la direction de la vitesse initiale fait un angle quelconque avec le rayon vecteur initial, on peut déterminer comme dans le cas précédent la longueur du grand axe et le temps d'une révolution, qui sont indépendants de cette direction. Soit ensuite, fig. 2, PA la direction de v_0, on trouvera l'autre foyer S' de l'ellipse en faisant $\angle APS' = \angle A'PS$, et prenant $PS' = 2a - PS$; SS' est alors la direction du grand axe, et le milieu M de SS' le centre de l'ellipse. Pour les différentes directions du grand axe,

la distance PS' reste constante, et par conséquent aussi la longueur de MO parallèle à PS', qui de plus passera toujours par le même point O, milieu de SP. Ainsi le lieu géométrique du centre des différentes trajectoires que l'on obtient en variant la direction de la vitesse initiale, dont la grandeur reste constante, est un cercle qui a son centre au milieu du rayon vecteur initial, et dont le rayon est égal à la moitié de la différence du grand axe avec le rayon vecteur initial. On voit par là comment on peut construire le lieu géométrique des sommets, qui présente encore ce cas remarquable:

Si la vitesse initiale est en grandeur telle, que, pour une direction perpendiculaire au rayon vecteur, la trajectoire serait un cercle, on a, pour une direction quelconque, $PS' = PS$; alors PM sera toujours perpendiculaire à SS', SS' parallèle à PA, et le cercle des centres M sera le cercle décrit sur PS comme diamètre. Donc, alors les grands axes des trajectoires seront parallèles à la vitesse initiale, la position initiale P du mobile sera un des sommets du petit axe, le lieu de l'autre sommet de cet axe sera le cercle de rayon SP décrit du centre S, et le lieu des sommets du grand axe sera la courbe nommée *limaçon de Pascal.*

Quand l'attraction est en raison directe de la distance, on a, prenant l'axe des x suivant le rayon vecteur initial et l'axe des y, ou OQ, parallèle à la vitesse initiale PV, pour l'équation de la trajectoire elliptique

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{\mu}} = 1,$$

où $r_0 = OP$, fig. 3, et où μ représente l'attraction sur l'unité de masse à l'unité de distance; les axes des coordonnées sont deux diamètres conjugués.

On trouve pour la vitesse v_1 que le mobile aurait au centre O, en partant sans vitesse initiale de P, et se mouvant sous l'action d'une force directement proportionnelle à la distance,

$$v_1 = r_0 \sqrt{\mu},$$

en sorte que l'on a

$$OP : OQ = r_0 : \frac{v_0}{\sqrt{\mu}} = r_0 : \frac{r_0 v_0}{v_1},$$

ou

$$OP : OQ = v_1 : v_0,$$

ce qui détermine entièrement la trajectoire quand on connaît le rapport de v_0 à v_1.

Le temps T d'une révolution est donné par la formule

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}},$$

ou, introduisant v_1,

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_1};$$

ce temps, qui d'ailleurs ne dépend que de la constante μ de l'attraction, est donc le même que celui d'une révolution d'un mobile qui parcourt, avec une vitesse uniforme égale à la vitesse finale v_1, le cercle décrit avec le rayon vecteur initial.

Si le mobile est venu dans un point A de sa trajectoire, sa vitesse est parallèle au diamètre OB conjugué de OA, et inversement proportionnelle à la perpendiculaire OC abaissée du centre des forces sur sa direction. Mais, d'après une propriété de l'ellipse, l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués étant constante, la perpendiculaire OC est inversement proportionnelle au demi-diamètre OB, et par conséquent la vitesse elle-même est directement proportionnelle à OB. Si donc on représente la vitesse initiale par le demi-diamètre OQ qui lui est parallèle, la direction et la grandeur de la vitesse dans un point quelconque de la courbe seront celles du diamètre conjugué du rayon vecteur. Ainsi la trajectoire, dans ce cas de mouvement libre d'un point matériel, est en même temps la courbe nommée *hodographe*.

Delft, Janvier 1877.

LA

FORMULE D'INTERPOLATION DE TCHÉBYCHEFF

SUIVANT LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS,

PAR

Ch. M. SCHOLS.

---

§ 1. Dans la pratique il arrive fréquemment que, pour différentes valeurs de la variable x, les valeurs d'une fonction $U = f(x)$ ont été trouvées par des mesures. Les résultats de ces mesures peuvent alors servir à déterminer, suivant la méthode des moindres carrés, les valeurs les plus probables des constantes qui entrent dans la fonction.

Souvent la forme de la fonction U est totalement ou partiellement inconnue. Si cette forme est inconnue en partie, la fonction U peut être remplacée par une formule d'interpolation de la forme:

$$U = F\varphi_m = F\,(A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \ldots + A_{m-1}^m x^{m-1} + A_m^m x^m), \quad (1)$$

où F est une fonction connue de x. Si la forme de la fonction est entièrement inconnue, il n'y a qu'à mettre, dans l'expression précédente, l'unité au lieu de F. Cette dernière supposition ne constitue donc qu'un cas particulier de la première, de sorte qu'il suffit de considérer le cas général, exprimé par la form. (1).

Il est impossible de décider *à priori* jusqu'à quelle puissance doit s'élever la série φ_m, c'est-à-dire, quelle valeur il faut attribuer à m; cela peut seulement se faire après la détermination des coefficients A, en examinant jusqu'à quel point les résultats

déduits de la formule (1), à l'aide de ces coefficients, concordent avec les observations. On peut, en effet, chercher l'erreur moyenne d'une observation isolée, et s'il se trouve qu'elle diffère peu de l'erreur moyenne d'une observation isolée obtenue par une autre voie, m aura été bien choisi; s'il n'en est pas ainsi, on devra prendre pour m une valeur plus grande et déterminer de nouveau les coefficients A.

§ 2. Pour éviter cet embarras, M. P. Tchébychef a développé des formules par lesquelles le polynome φ_m se calcule successivement pour $m = 0, 1, 2, 3$ etc., et par lesquelles est trouvée, en outre, l'erreur moyenne d'une observation isolée, de sorte qu'on peut s'assurer chaque fois si l'on a calculé assez de termes de ce polynome et si, par conséquent, le développement peut être arrêté.

Les formules dont il s'agit ont été données, pour le cas $F = 1$, dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg* VIII[e] Série, t. I, n° 15, 1859, et, pour le cas général, dans les *Mémoires couronnés de l'Académie royale de Belgique*, collection in—8°, t. XXI, 1870, et dans la *Balistique extérieure* de M. N. Mayevski, Paris, 1872.

Mais la démonstration de ces formules doit être cherchée dans un travail de M. Tchébychef sur les *fractions continues*, inséré au tome III des *Mémoires savants de l'Académie impériale des sciences, pour la 1re et la 3e classe*, travail dont une traduction française a été publiée dans le *Journal de Mathématiques* de Liouville, 2e Série, t. III, 1858.

La nature compliquée de cette démonstration, qui repose entièrement sur la théorie des fractions continues, est peut-être une des causes pour lesquelles ces formules ne sont pas aussi généralement connues qu'elles méritent de l'être.

M. E. Jouffret en a donné, dans un mémoire: *Sur l'établissement et l'usage des tables de tir* (*Revue d'Artillerie*, 1873—74), une démonstration plus élémentaire, qui toutefois est encore un peu prolixe, attendu que les formules en question y sont déduites d'un autre système de formules, qui elles aussi ont dû être préalablement établies.

J'ai réussi à trouver pour les formules de Tchébychef une démonstration directe, de laquelle, en outre, ressort clairement la signification des grandeurs qui entrent dans ces formules.

§ 3. A la formule d'interpolation (1) nous pouvons toujours en substituer une autre, de la forme:

$$U = F\varphi_m = F(K_0\psi_0 + K_1\psi_1 + K_2\psi_2 + .. + K_{m-1}\psi_{m-1} + K_m\psi_m). \quad (2)$$

où

$$\psi_p = x^p + C^p_{p-1}x^{p-1} + C^p_{p-2}x^{p-2} + \ldots + C^p_1 x + C^p_0 , \quad . \quad (3)$$

représente un polynome de la puissance p et à p coefficients C arbitrairement choisis, pourvu seulement que les $m+1$ grandeurs K soient déterminées d'après la théorie des moindres carrés.

Si l'on a maintenant trouvé pour n valeurs différentes de x, à savoir, pour $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, les valeurs correspondantes $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ de U, avec les poids $g_1, g_2, g_3 \ldots g_n$, la théorie des moindres carrés donne, pour déterminer les grandeurs K, les équations normales suivantes:

$$\begin{aligned}
[guF\psi_0] &= [gF^2\psi_0^2]K_0 + [gF^2\psi_0\psi_1]K_1 + . + [gF^2\psi_0\psi_m]K_m \\
[guF\psi_1] &= [gF^2\psi_0\psi_1]K_0 + [gF^2\psi_1^2]K_1 + . + [gF^2\psi_1\psi_m]K_m \quad (4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[guF\psi_m] &= [gF^2\psi_0\psi_m]K_0 + [gF^2\psi_1\psi_m]K_1 + . + [gF^2\psi_m^2]K_m.
\end{aligned}$$

Parmi tous les systèmes de valeurs qui peuvent être choisis pour les $\frac{1}{2}m(m+1)$ coefficients C, il y en a un par lequel les grandeurs K acquièrent des propriétés particulières. Si, en effet, nous déterminons ces coefficients de telle sorte qu'ils satisfassent aux $\frac{1}{2}m(m+1)$ équations:

$$[gF^2\psi_p\psi_q] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

toutes les grandeurs K deviennent indépendantes l'une de l'autre et sont déterminées par l'équation:

$$K_p = \frac{[guF\psi_p]}{[gF^2\psi_p^2]} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

avec le poids

$$\left[gF^2\psi_p^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

En outre, la série (2) possède alors la propriété particulière de toujours donner, à quelque terme $K_p\psi_p$ qu'on l'arrête, les coefficients les plus probables du polynome de la puissance p.

§ 4. La fonction ψ_p, étant un polynome de la puissance p, à p constantes, peut toujours être remplacée par l'expression

$$\psi_p = x\psi_{p-1} + D_{p-1}^p\psi_{p-1} + D_{p-2}^p\psi_{p-2} + \ldots + D_1^p\psi_1 + D_0^p\psi_0 \ldots \quad (8)$$

où les lettres D représentent p nouvelles constantes. En multipliant cette équation par $gF^2\psi_q$, et sommant pour toutes les observations, on obtient, en vertu de (5), si q est $\geqq p+1$:

$$\left[gxF^2\psi_{p-1}\psi_q\right] = 0,$$

d'où il suit qu'on a:

$$\left[gxF^2\psi_p\psi_q\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

à moins que la différence de p et q ne soit l'unité ou zéro.

Mais si q est $\leqq p-3$, cette sommation donne:

$$0 = \left[gxF^2\psi_{p-1}\psi_q\right] + D_q^p\left[gF^2\psi_q^2\right]$$

d'où il résulte, en tenant compte de (9), que tous les coefficients D sont égaux à *zéro*, sauf les deux coefficients D_{p-1}^p et D_{p-2}^p, que nous représenterons dans la suite par $-b_p$ et $-a_p$. L'équation (8) se transforme donc en celle-ci:

$$\psi_p = (x - b_p)\psi_{p-1} - a_p\psi_{p-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

à l'aide de laquelle toutes les fonctions ψ peuvent être calculées aussitôt que les coefficients a et b sont connus.

§ 5. Multiplions l'équation (10) par gF^2x^q, et sommons pour toutes les observations, on obtient:

$$\left[gF^2\psi_p x^q\right]=\left[gF^2\psi_{p-1}x^{q+1}\right]-b_p\left[gF^2\psi_{p-1}x^q\right]-a_p\left[gF^2\psi_{p-2}x^q\right]$$

ou, posant en général:

$$\left[gF^2\psi_p x^q\right]=(p\,.\,q),\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$(p\,.\,q)=(p-1\,.\,q+1)-b_p\,(p-1\,.\,q)-a_p\,(p-2\,.\,q)\ .\ (12)$$

Toutes les grandeurs $(p\,.\,q)$ sont maintenant égales à *zéro*, tant qu'on a $p > q$; car de (5) il suit, à cause de $\psi_0=1$:

$$0=\left[gF^2\psi_p\psi_0\right]=\left[gF^2\psi_p\right]=(p\,.\,0),$$

tant qu'on a $p > 0$. Faisant maintenant $q=0$ dans (12), on obtient, en vertu de l'égalité précédente: $(p-1\,.\,1)=0$, tant qu'on a $p-2>0$ ou $p-1>1$, c'est-à-dire: $(p\,.\,1)=0$, tant qu'on a $p>1$. En continuant de la sorte, et faisant successivement $q=1,\ 2,\ 3\ldots.\ (p-3)$ dans l'équation (12), on trouve d'une manière générale:

$$(p\,,\,q)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

tant que p est $> q$.

Faisons ensuite, dans (12), $q=p-2$, il en résulte:

$$0=(p-1\,.\,p-1)-a_p\,(p-2\,.\,p-2),$$

ou:

$$a_p=\frac{(p-1\ .\ p-1)}{(p-2\ .\ p-2)};\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

enfin, par la substitution $q=p-1$, on trouve:

$$0=(p-1\,.\,q)-b_p(p-1\,.\,p-1)-a_p(p-2\,.\,p-1),$$

ou:

$$b_p = \frac{(p-1.p)}{(p-1.p-1)} - a_p \frac{(p-2.p-1)}{(p-1.p-1)} = \frac{(p-1.p)}{(p-1.p-1)} - \frac{(p-2.p-1)}{(p-2.p-2)}. \quad (15)$$

Les trois équations (12), (14) et (15) suffisent pour qu'on puisse calculer toutes les grandeurs $(p\,.\,q)$, a et b, en partant des valeurs de $(0\,.\,q)$, pour lesquelles on trouve, d'après (11):

$$(0\,.\,q) = \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_0\,x^q\right] = \left[g\mathrm{F}^2\,x^q\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

et qui par conséquent sont exprimées directement en fonction des données du problème. L'ordre dans lequel le calcul s'exécute le plus facilement sera indiqué plus loin.

§ 6. Lorsque les fonctions ψ sont connues, les grandeurs K peuvent être calculées au moyen de (6), mais cela peut se faire d'une manière plus simple en exprimant K_p en K_{p-1}, K_{p-2} .... K_1, K_0. De (5), il suit en effet:

$$\begin{aligned}
(m\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_m\,x^p\right] \\
(m-1\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_{m-1}\,x^p\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(p+1\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_{p+1}\,x^p\right] \\
(p\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_p\,x^p\right] \\
(p-1\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_{p-1}\,x^p\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_1\,x^p\right] \\
(0\,.\,p) &= \left[g\mathrm{F}^2\,\psi_0\,x^p\right]
\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces équations, après les avoir multipliées par K_m, K_{m-1} ..... K_{p+1}, K_p, K_{p-1} ..... K_1, K_0, et en tenant compte de (2) et de (13), on trouve:

$$(p.p)K_p + (p-1.p)K_{p-1} + \dots + (1.p)K_1 + (0.p)K_0 = \left[gF^2\varphi_m x^p\right].$$

Mais, par l'application de la méthode des moindres carrés à l'équation (1), nous obtenons, attendu que le coefficient de A_p^m est Fx^p:

$$\left[guFx^p\right] = \left[gF^2\varphi_m x^p\right],$$

de sorte que nous trouvons finalement pour la valeur de K_p:

$$K_p = \frac{\left[guFx^p\right] - (p-1.p)K_{p-1} - \dots - (1.p)K_1 - (0.p)K_0}{(p.p)} \quad . \; . \; (17)$$

Il convient de remarquer que le dénominateur de K_p est ici le même que dans (6), car de l'éq. (3), en multipliant par $gF^2\psi_p$ et sommant pour toutes les observations, il résulte, les éq. (11) et (13) étant prises en considération:

$$\left[gF^2\psi_p^2\right] = \left[gF^2\psi_p x^p\right] + C_{p-1}^p\left[gF^2\psi_p x^{p-1}\right] + . + C_0^p\left[gF^2\psi_p x^0\right] = (p.p) \quad (18)$$

§ 7. Posons:

$$\Delta_m = u - F\varphi_m = u - F(K_0\psi_0 + K_1\psi_1 + . + K_{m-1}\psi_{m-1} + K_m\psi_m) \quad (19)$$

l'erreur moyenne de l'unité de poids est alors exprimée par:

$$M_m = \sqrt{\frac{\left[g\Delta_m^2\right]}{n\text{-}m\text{-}1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

de sorte qu'il s'agit surtout de calculer la grandeur $\left[g\Delta_m^2\right]$; or, de (19) on déduit:

$$\left[g\Delta_m^2\right] = \left[g\{u - F(K_0\psi_0 + K_1\psi_1 + . + K_{m-1}\psi_{m-1} + K_m\psi_m)\}^2\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \left[gu^2\right] + K_0^2\left[gF^2\psi_0^2\right] + K_1^2\left[gF^2\psi_1^2\right] + \ . + K_m^2\left[gF^2\psi_m^2\right] \\ \quad - 2K_0\left[guF\psi_0\right] - 2K_1\left[guF\psi_1\right] - . - 2K_m\left[guF\psi_m\right] \\ \quad + \text{une série de termes de la forme: } 2K_pK_q\left[gF^2\psi_p\psi_q\right] \end{array}\right.$$

expression qui, en vertu de (5), (6) et (18), se change en celle-ci:

$$\left[g\Delta_m^2\right] = \left[gu^2\right] - (0.0)K_0^2 - (1.1)K_1^2 - \ldots - (m.m)K_m^2$$

pour laquelle nous pouvons aussi écrire:

$$\left[g\Delta_m^2\right] = \left[g\Delta_{m-1}^2\right] - (m.m)\,K_m^2 \ \ldots\ldots \quad (21)$$

Comme les grandeurs K_p sont indépendantes l'une de l'autre, et que leur poids est exprimé par $(p.p)$, nous trouvons immédiatement pour l'erreur moyenne de U, calculée d'après (2):

$$M_u = M_m F\sqrt{\frac{\psi_0^2}{(0.0)} + \frac{\psi_1^2}{(1.1)} + \ldots + \frac{\psi_m^2}{(m.m)}} \ \ldots \quad (22)$$

§ 8. Pour terminer, nous exposerons l'ordre dans lequel les diverses grandeurs sont calculées:

$K_0\ \psi_0$

$$(0.0) = [gF^2]$$

$$K_0 = \frac{[guF]}{(0.0)}$$

$$\psi_0 = 1$$

$$\left[g\Delta_0^2\right] = \left[gu^2\right] - (0.0)\,K_0^2$$

$K_1\ \psi_1$

$$(0.1) = [gF^2x] \qquad (0.2) = [gF^2x^2]$$

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = \frac{(0.1)}{(0.0)} \qquad (1.1) = (0.2) - b_1(0.1)$$

$$K_1 = \frac{[guFx] - (0.1)\,K_1}{(1.1)}$$

$$\psi_1 = x - b_1$$

$$\left[g\Delta_1^2\right] = \left[g\Delta_0^2\right] - (1.1)\,K_1^2$$

$K_2\ \psi_2$

$$(0.3) = [gF^2x^3] \qquad (0.4) = [gF^2x^4]$$

$$(1.2) = (0.3) - b_1(0.2) \qquad (1.3) = (0.4) - b_1(0.3)$$

$$a_2 = \frac{(1.1)}{(0.0)}$$

$$b_2 = \frac{(1.2)}{(1.1)} - \frac{(0.1)}{(0.0)} \qquad (2.2) = (1.3) - b_2(1.2) - a_2(0.2)$$

$$K_2 = \frac{[guFx^2] - (0.2)K_0 - (1.2)K_1}{(2.2)}$$

$$\psi_2 = (x - b_2)\psi_1 - a_2\psi_0$$

$$\left[g\Delta_2^2\right] = \left[g\Delta_1^2\right] - (2.2)K_2^2$$

$K_3 \psi_3$

$(0.5) = [gF^2x^5]$ $\quad$ $(0.6) = [gF^2x^6]$

$(1.4) = (0.5) - b_1(0.4)$ $\quad$ $(1.5) = (0.6) - b_1(0.5)$

$(2.3) = (1.4) - b_2(1.3) - a_2(0.3)$ $\quad$ $(2.4) = (1.5) - b_2(1.4) - a_2(0.4)$

$$a_3 = \frac{(2.2)}{(1.1)}$$

$$b_3 = \frac{(2.3)}{(2.2)} - \frac{(1.2)}{(1.1)} \qquad (3.3) = (2.4) - b_3(2.3) - a_3(1.3)$$

$$K_3 = \frac{[guFx^3] - (0.3)K_0 - (1.3)K_1 - (2.3)K_2}{(3.3)}$$

$$\psi_3 = (x - b_3)\psi_2 - a_3\psi_1$$

$$\left[g\Delta_3^2\right] = \left[g\Delta_2^2\right] - (3.3)K_3^2$$

$K_{m}\psi_m$

$(0.2m-1) = [gF^2x^{2m-1}]$

$(1.2m-2) = (0.2m-1) - b_1(0.2m-2)$

$(2.2m-3) = (1,2m-2) - b_2(1.2m-3) - a_2(0.2m-3)$

$(3.2m-4) = (2.2m-3) - b_3(2.2m-4) - a_3(1.2m-4)$

. . . .

$(m-1.m) = (m-2.m+1) - b_{m-1}(m-2.m) - a_{m-1}(m-3.m)$

$$a_m = \frac{(m-1.m-1)}{(m-2.m-2)}$$

$$b_m = \frac{(m-1.m)}{(m-1.m-1)} - \frac{(m-2.m-1)}{(m-2.m-2)}$$

$$(0.2m) = [g\mathrm{F}^2 x^{2m}]$$

$$(1.2m-1) = (0.2m) - b_1(0.2m-1)$$

$$(2.2m-2) = (1.2m-1) - b_2(1.2m-2) - a_2(0.2m-2)$$

. . . .

$$(m-1.m+1) = (m-2.m+2) - b_{m-1}(m-2.m+1) - a_{m-1}(m-3.m+1)$$

$$(m.m) = (m-1.m+1) - b_m(m-1.m) - a_m(m-2.m).$$

$$\mathrm{K}_m = \frac{[gu\mathrm{F}x^m] - (0.m)\mathrm{K}_0 - (1.m)\mathrm{K}_1 - \;.\;.\;.\;.\; - (m-1.m)\mathrm{K}_m}{(m.m)}$$

$$\psi_m = (x-b_m)\psi_{m-1} - a_m\psi_{m-2}$$

$$\left[g\Delta^2_m\right] = \left[g\Delta^2_{m-1}\right] - (m.m)\mathrm{K}^2_m\,.$$

BREDA, Mai 1875.

THÉORIE

DES

NOMBRES COMPLEXES ET BICOMPLEXES,

PAR

A. BENTHEM Gz. [1])

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE NOMBRES COMPLEXES CONSTANTS.

§ 1.

Les formes complexes ordinaires.

1. Si, dans un plan quelconque V, on prend un point fixe O pour *point de départ* (origine), et pour *axe* une ligne droite OX, menée par ce point O et supposée indéfiniment prolongée, chaque point P du plan V est complètement déterminé par sa distance au point O et par la direction de la droite OP qui joint ces deux points Cette direction est donnée par l'angle que la ligne de jonction OP fait avec OX, c'est-à-dire, par l'angle que OX devrait parcourir, en tournant autour du point O, pour arriver dans la position OP (fig. 1). Cette rotation peut se faire de deux manières: dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, et dans le sens opposé. La seconde rotation est dite positive, la première

[1]) (Extrait d'un Mémoire publié, sous le titre de *Theorie der functien van veranderlijke complexe getallen* door Dr. A. Benthem Gz., dans le *Nieuw Archief van het Wiskundig Genootschap: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"*, t. I, II et III).

négative ; c'est ainsi que angle XOP $= +60°$ et angle $XOP_1 = -60°$. Si donc la longueur de OP est égale à celle de OP_1, égale à r, et qu'on indique la direction de la droite de jonction d'un point avec le point O en plaçant derrière la longueur de cette droite une flèche ↑, et derrière celle-ci l'angle que la droite fait avec OX, le point P est déterminé par l'expression $r \uparrow 60°$, et le point P_1 par $r \uparrow -60°$ ou $r \uparrow 300°$. Le point P_2 sur la ligne OX est indiqué, dans ce mode d'expression, par $r \uparrow 0°$, et le point P_3 sur OX_1 par $r \uparrow 180°$.

Mais on peut aussi se figurer les angles exprimés par des arcs, et ceux-ci mesurés en rayons; on a alors $P_3\, r \uparrow \pi$, $P\, r \uparrow \frac{\pi}{3}$, $P_4\, r \uparrow \frac{\pi}{2}$, $P_5\, r \uparrow \frac{3\pi}{2}$, $P_1\, r \uparrow -\frac{\pi}{3}$ ou $r \uparrow \frac{5\pi}{3}$, etc. On voit par là que les directions (états) positive et négative, regardées comme seules possibles dans la théorie des nombres, se présentent ici comme des cas particuliers, indiqués par $\uparrow 0$ et par $\uparrow 180°$ ou $\uparrow \pi$.

2. La définition d'un point dans un plan, telle qu'elle vient d'être donnée, est entièrement conforme à celle qu'on adopte en géométrie supérieure, lorsqu'on emploie des coordonnées polaires : le point O est le pôle, OX l'axe, r le rayon vecteur ou *module*, et l'angle XOP l'*amplitude* du point P. Tandis que r, dans cette définition, marque simplement la distance à laquelle le point désigné se trouve de l'origine O, l'angle XOP fait connaître non-seulement la direction du rayon vecteur, mais aussi la manière dont il est parvenu dans cette position. Pour $OP_2 = P_3O = a$, par exemple, les expressions $a \uparrow 0$, $a \uparrow 2\pi$, $a \uparrow 4\pi$, $a \uparrow -2\pi$, etc. désignent toutes le point P_2 ; mais, en outre, elles montrent clairement après combien de rotations de la droite OX le point P_2 est arrivé à cette position, et dans quel sens ces rotations ont eu lieu. De même $a \uparrow -\pi$, $a \uparrow 3\pi$, $a \uparrow -5\pi$, etc. marquent toutes le point P_3 ; $a \uparrow \frac{\pi}{3}$, $a \uparrow \frac{7\pi}{3}$, $a \uparrow -\frac{5\pi}{3}$ etc. le point P, et ainsi de suite.

3. Pour la *situation* même du point, il est sans doute indifférent qu'il y soit arrivé de telle ou de telle manière; mais cela n'est plus du tout le cas lorsque l'indicateur de la direction, le *coefficient de direction*, doit être soumis à des opérations (réductions) (v. nos 14 et 15). Il faut alors nécessairement prendre en considération la manière dont le point a été amené dans sa position: il faut, pour ainsi dire, tenir compte de la *naissance*, de l'origine du point, et celle-ci est indiquée par le coefficient de direction.

4. Dans les cas de beaucoup les plus nombreux ce coefficient n'est pas connu, mais doit être déduit de données particulières, et il arrive alors souvent qu'on ne puisse déterminer que la situation du point, rien de plus. Si, pour un point P_1 situé entre OX et OP_5 (fig. 1), on donne par exemple $OP_1 = 5$ et tang angle $XOP_1 = -\frac{3}{4}$, angle XOP_1 sera égal à $-36° 52' 11'',7$, ou à $+323° 7' 48'',3$, ou encore à $n.360° + 323° 7' 48'',3$, n ayant une valeur *entière* quelconque. En posant donc angle $XOP_1 = \varphi$, il y a une infinité de valeurs de φ telles, que $5 \uparrow \varphi$ représente le point P_1. On est par conséquent dans une ignorance absolue quant au nombre des révolutions qui ont amené le point P_1 dans sa position, et quant au sens dans lequel ces révolutions se sont effectuées. De toutes les valeurs trouvées pour φ on n'en mentionne alors qu'une seule, ordinairement celle indiquant l'angle que OX devrait parcourir pour prendre la position OP_1, si la rotation avait lieu dans le sens positif. Cet angle est toujours plus petit que 360° ou 2π; dans l'exemple ci-dessus, il sera de $323° 7' 48'',3$, de sorte que le point P_1 sera indiqué par l'expression $5 \uparrow 323° 7' 48'',3$. En admettant ainsi une rotation déterminée, c'est-à-dire, en fixant arbitrairement le mode de naissance du point P_1, on doit être souvent conduit à des résultats erronés, dès que le coefficient de direction est soumis à des réductions. Cet inconvénient ne saurait être évité par l'introduction de l'expression générale $5 \uparrow (n.360° + 323° 7' 48'',3)$, où n peut avoir toutes les valeurs numériques entières, tant positives que négatives; car l'indétermination de n susciterait des difficultés encore plus grandes, et n'avancerait à rien.

5. En présence de l'incertitude qui pèse en pareil cas sur la grandeur et le sens de la rotation, on a admis la distinction suivante: l'angle $\varphi = 323^\circ\,7'\,48'',3$, qui détermine seulement la situation du point P_1 par rapport au point d'origine O, est appelé la direction *directe*, la direction *principale* de OP_1, tandis que $n.360^\circ + \varphi$ est désigné comme la direction *indirecte*, possible ou *générale*. Les directions directes sont donc toujours données par des angles positifs et moindres que 2π ou 360°; les angles supérieurs ou égaux à 2π ou à 360°, de même que les angles négatifs, sont toujours regardés comme des directions indirectes. La direction *réelle* de OP_1, celle qui est en rapport avec le mode de naissance du point P_1, peut correspondre à une direction indirecte aussi bien qu'à la direction directe; c'est ainsi que $-a$ peut représenter aussi bien $a \uparrow -\pi$, ou $a \uparrow 3\pi$, etc. que $a \uparrow \pi$.

6. Quand $r \uparrow (n.360^\circ + \varphi)$ est réduit à $r \uparrow \varphi$, la direction indirecte se change en direction directe; mais, dans ce passage, la vraie signification du coefficient de direction se perd: $5 \uparrow -240^\circ$ et $5 \uparrow 480^\circ$ ne sont pas tout à fait la même chose que $5 \uparrow 120^\circ$. Pour cette raison, on doit s'abstenir de toute réduction du coefficient de direction dans tous les cas où la question ne concerne pas exclusivement la *situation* d'un point.

7. Les expressions de la forme $r \uparrow \varphi$ sont appelées *expressions complexes*, *nombres complexes*. Tout nombre complexe se compose donc de deux éléments tout à fait distincts, dont le premier représente une valeur numérique, le second une direction (état). Deux nombres complexes, $r \uparrow \varphi$ et $a \uparrow \alpha$, ne peuvent être égaux que si les deux éléments constituants sont égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, si $r = a$ et $\varphi = \alpha$; dans ce cas seul, en effet, $r \uparrow \varphi$ et $a \uparrow \alpha$ peuvent représenter le même point.

Un nombre complexe est zéro lorsque son module est zéro; il représente alors le point de départ, l'origine.

Les nombres complexes dont les coefficients de direction sont $\uparrow 0^\circ$ ou $\uparrow 180^\circ$, et qui peuvent en conséquence être représentés par $+a$ et $-a$, sont dits des nombres *réels*; ceux-ci sont donc une espèce particulière de nombres complexes.

§ 2.

Réduction des formes complexes.

8. Tandis que les nombres réels ne représentent que deux états (directions) exactement opposés, et n'ont par conséquent rapport qu'à des points situés sur une droite, un nombre complexe peut désigner un point quelconque d'un plan. Les opérations propres aux nombres réels ne sauraient donc être appliquées telles quelles aux nombres complexes d'une nature plus générale. Avant de pouvoir parler de la manière d'exécuter les opérations sur les nombres complexes, il faut d'abord établir ce qu'on doit entendre par ces opérations; les définitions, d'ailleurs, devront convenir à tous les cas particuliers, et par conséquent aussi aux nombres réels. Nous nous bornerons ici à communiquer brièvement ces définitions dans l'hypothèse qu'il s'agisse de deux nombres seulement, en renvoyant, pour le cas d'un plus grand nombre d'éléments et pour des détails plus circonstanciés, au Mémoire inséré dans le *Nieuw Archief* (*N. A.*), chap. II.

9. *Addition. Les nombres complexes* $a\uparrow\alpha$ *et* $b\uparrow\beta$ *étant représentés par les points* P *et* P_1 (fig. 2), *on entend par la somme de ces nombres le nombre complexe* $c\uparrow\gamma$, *indiqué par un point* P_2, *qui est situé par rapport à l'un des points donnés*, P, *comme l'autre point* P_1 *est situé par rapport au point de départ* O.

Si donc on trace $PP_2 =$ et $\parallel OP_1$, P_2 représente $c\uparrow\gamma$; c est par conséquent la diagonale du parallélogramme qui a a et b pour côtés. C'est ainsi qu'on a, par exemple:

$$a\uparrow\alpha + a\uparrow-\alpha = a\uparrow\alpha + a\uparrow(2\pi-\alpha) = 2a\,Cos\,\alpha\uparrow 0. \quad (1)$$

10. *Soustraction. Par la différence de deux nombres complexes on entend un troisième nombre complexe, qui, ajouté à l'un des deux premiers, reproduit l'autre.*

Si, comme précédemment, les points P, P_1 et P_2 (fig. 2) sont les représentations de $a\uparrow\alpha$, $b\uparrow\beta$ et $c\uparrow\gamma$, on a $a\uparrow\alpha + b\uparrow\beta = c\uparrow\gamma$,

et P est par conséquent la représentation de la différence $a \uparrow \alpha$ des nombres $c \uparrow \gamma$ et $b \uparrow \beta$, figurés par P_2 et P_1. La figure montre qu'on a:

$$c \uparrow \gamma - b \uparrow \beta = c \uparrow \gamma + b \uparrow (\pi + \beta) \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

On a aussi:

$$a \uparrow \alpha - a \uparrow - \alpha = a \uparrow \alpha - a \uparrow (2\pi - \alpha) = 2a \, Sin \, \alpha \uparrow \frac{\pi}{2} \quad . . (3)$$

11. *Multiplication. Par le produit de deux nombres complexes* $a \uparrow \alpha$ et $b \uparrow \beta$ *on entend le nombre complexe* $ab \uparrow (\alpha + \beta)$, *obtenu en prenant le produit des modules dans la direction qui est indiquée par la somme des amplitudes.*

Soient P et P_1 (fig. 3) les points représentant les nombres $a \uparrow \alpha$ et $b \uparrow \beta$; sur l'axe OX prenons OP_2 égal à l'unité positive; joignons P_2 à P $(a \uparrow \alpha)$, et faisons angle $P_1 OP_3 =$ angle P_2 OP et angle $OP_1 P_3 =$ angle OP_2 P; le point P_3 représentera alors le nombre $ab \uparrow (\alpha + \beta)$, puisqu'on a: angle $XOP_3 = \alpha + \beta$ et $OP_2 : OP_1 = OP : OP_3$, et par conséquent $OP_3 = ab$.

De l'égalité

$$a \uparrow \alpha + b \uparrow \alpha + c \uparrow \alpha + \ldots = (a + b + c + \ldots) \uparrow \alpha,$$

on tire d'ailleurs, en faisant $a = b = c = \ldots$,

$$(a \uparrow \alpha) . n = na \uparrow \alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

c'est-à-dire: *pour prendre un nombre complexe un nombre entier (absolu) de fois, on prend autant de fois le module, en laissant l'amplitude intacte.*

12. *Division. Par le quotient de deux nombres on entend un troisième nombre, qui, multiplié par l'un des deux premiers, reproduit l'autre.* On a donc

$$\frac{ab \uparrow (\alpha + \beta)}{a \uparrow \alpha} = b \uparrow \beta, \text{ et par conséquent aussi:}$$

$$\frac{c \uparrow \gamma}{a \uparrow \alpha} = \frac{c}{a} \uparrow (\gamma - \alpha), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

c'est-à-dire: *le quotient de deux nombres complexes est égal au quotient des modules, pris dans la direction déterminée par la différence des amplitudes.*

Il suit de là:

$$\frac{a \uparrow \alpha}{n} = \frac{a}{n} \uparrow \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et en général:

$$(a \uparrow \alpha) \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} \uparrow \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Comme d'ailleurs un produit de deux nombres, ou un produit continu de plusieurs nombres, parmi lesquels se trouve au moins *un* nombre complexe, est toujours lui-même un nombre complexe, le cas d'un nombre absolu, à diviser par un nombre complexe, ne peut jamais se présenter.

13. *Elévation aux puissances. Le produit continu de n facteurs, égaux chacun à un même nombre complexe* $a \uparrow \alpha$, *est dit la* n^e *puissance de ce nombre complexe* $a \uparrow \alpha$. De $a \uparrow \alpha \,.\, b \uparrow \beta \,.\, c \uparrow \gamma \ldots = abc\ldots\ldots \uparrow (\alpha + \beta + \gamma \ldots)$ on déduit, n étant un nombre entier:

$$(a \uparrow \alpha)^n = a^n \uparrow n\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ce qui est le *théorème de Moivre.*

Ce théorème reste vrai aussi pour les valeurs négatives et fractionnaires de n, comme on le voit, quant aux premières, par les égalités successives

$$(a \uparrow \alpha)^{-p} = \frac{+1}{(a \uparrow \alpha)^p} = \frac{1 \uparrow 0}{a^p \uparrow p\alpha} = \frac{1}{a^p} \uparrow (0 - p\alpha) = a^{-p} \uparrow -p\alpha,$$

et, quant aux secondes, en faisant dans l'éq. (8) $a^n = a_1$, et $n\alpha = \alpha_1$; ce changement donne, en effet:

$$\left(a_1^{\frac{1}{n}} \uparrow \frac{\alpha_1}{n}\right)^n = a_1 \uparrow \alpha_1,$$

et par conséquent aussi

$$a_1^{\frac{1}{n}} \uparrow \frac{\alpha_1}{n} = (a_1 \uparrow \alpha_1)^{\frac{1}{n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

et en élevant à la puissance p,

$$a_1^{\frac{p}{n}} \uparrow \frac{p}{n}\alpha_1 = (a_1 \uparrow \alpha_1)^{\frac{p}{n}};$$

quelle que soit la valeur de n, entière ou fractionnaire, on a donc cette règle:

La n^e puissance d'un nombre complexe s'obtient en prenant la n^e puissance du module, dans la direction marquée par n fois l'amplitude.

14. *Extraction des racines. Par la racine n^e d'un nombre complexe on entend un autre nombre complexe qui, élevé à la n^e puissance, reproduit le premier nombre complexe.*

En vertu de la form. (9) on a donc:

$$\sqrt[n]{(a \uparrow \alpha)} = \sqrt[n]{a} \uparrow \frac{\alpha}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

En ce qui concerne la détermination des valeurs de x qui satisfont aux équations $x^n \pm 1 = 0$, nous nous bornerons ici aux remarques suivantes.

Si, dans $x^n - 1 = 0$, ou $x = \sqrt[n]{1}$, 1 doit être entendu au sens absolu (arithmétique), x n'offre qu'une seule valeur (également absolue), à savoir $x = 1$.

Mais si 1 entre dans l'équation à titre de nombre complexe $+1$, il peut y représenter

$$1 \uparrow 0,\ 1 \uparrow 2\pi,\ 1 \uparrow 4\pi, \ldots.\ 1 \uparrow 2k\pi, \ldots,$$

k pouvant passer par toutes les valeurs numériques entières. Lorsqu'on sait ce que $+1$ représente, par exemple $1 \uparrow 4\pi$, $x = \sqrt[n]{1}$ n'a encore qu'une valeur unique (mais maintenant complexe), $x = \sqrt[n]{1 \uparrow 4\pi} = 1 \uparrow \frac{4\pi}{n}$. Dans le cas, au contraire, où la valeur précise, représentée par $+1$, n'est pas donnée, il y a une infinité de valeurs de x qui satisfont à l'équation, à savoir: $x =$

$$1 \uparrow 0,\ 1 \uparrow \frac{2\pi}{n},\ 1 \uparrow \frac{4\pi}{n} \ldots.\ 1 \uparrow \frac{2k\pi}{n}, \ldots.$$

Tient-on, dans ce cas, uniquement compte de la *situation* du point qui est représenté par x, toutes ces solutions se laissent réduire à un nombre n de valeurs: $x =$

$$1 \uparrow 0, \; 1 \uparrow \frac{2\pi}{n}, \; 1 \uparrow \frac{4\pi}{n}, \ldots \; 1 \uparrow \frac{2(n-1)\pi}{n}, \ldots \quad (11)$$

(Voir *N. A.*, *l. c.*)

15. On voit, par ce qui précède, que dans la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, les coefficients de direction suivent les règles qui sont indiquées en Algèbre élémentaire pour les exposants, tandis que les modules sont traités comme des nombres arithmétiques ordinaires. Entre l'application aux nombres complexes de l'extraction des racines et celle des trois autres opérations, il existe toutefois une très grande différence. Si l'on tient seulement compte de la situation des points, on a les formules:

$$ab \uparrow (\alpha + \beta) = ab \uparrow [(2n\pi + \alpha) + (2n_1\pi + \beta)],$$

$$\frac{a}{b} \uparrow (\alpha - \beta) = \frac{a}{b} \uparrow [(2n\pi + \alpha) - (2n_1\pi + \beta)],$$

et

$$a^q \uparrow q\alpha = a^q \uparrow q\,(2n\pi + \alpha),$$

dans le cas ou q est un nombre entier. Il suit de là qu'alors la multiplication, la division et l'élévation aux puissances (avec exposants entiers) donnent pour les directions indirectes le même résultat que pour les directions directes, et que dans l'application de ces opérations on peut par conséquent entièrement négliger les directions indirectes. Dans l'extraction des racines, au contraire, ces directions indirectes peuvent conduire à des résultats entièrement différents, comme on l'a déjà vu plus haut.

Dans l'algèbre ordinaire, $+1$ est toujours pris suivant deux directions dans $x = \sqrt[2n]{+1}$, à savoir, suivant la direction directe et *une* direction indirecte $(2n\pi)$; $+1$ n'est pris qu'en une seule direction, la directe, dans $x = \sqrt[2n+1]{+1}$; dans $x = \sqrt[2n-1]{-1}$ on ne

prend -1 que dans la direction indirecte $(2n+1)\pi$; enfin on écarte d'avance, comme une impossibilité, $x=\sqrt[2n]{-1}$. La raison de cet arbitraire se trouve dans la plus grande simplicité des résultats ainsi obtenus, et dans la circonstance qu'on ne considère que des nombres arithmétiques et des nombres complexes positifs et négatifs.

§ 3.

Autre forme des nombres complexes.

16. Si l'on détermine les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^2+1=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

on obtient, d'après ce qui précède:

$$x=1\uparrow\frac{\pi}{2},\ 1\uparrow\frac{3\pi}{2},\ 1\uparrow\frac{5\pi}{2},\ 1\uparrow\frac{7\pi}{2},\ \ldots\ldots,$$

et en tenant uniquement compte de la situation du point,

$$x=1\uparrow\frac{\pi}{2} \text{ et } x=1\uparrow\frac{3\pi}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

ou, puisqu'on a $1\uparrow\frac{3\pi}{2}=-1\uparrow\frac{\pi}{2}$,

$$x=1\uparrow\frac{\pi}{2} \text{ et } x=-1\uparrow\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Suivant les considérations algébriques ordinaires, il doit être satisfait à l'équation (12) par deux valeurs de x,

$$x=+\sqrt{-1}\,.\,1 \text{ et } x=-\sqrt{-1}\,.\,1, \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

qui, de même que les précédentes (14), ne diffèrent que par le signe; de sorte qu'on a été conduit à attribuer à $+\sqrt{-1}\,.\,1$ la signification de $1\uparrow\frac{\pi}{2}$, et à $-\sqrt{-1}\,.\,1$ celle de $-1\uparrow\frac{\pi}{2}$ ou $1\uparrow\frac{3\pi}{2}$.

On a donc cette définition:

$+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ ne sont que des signes, tout comme $+$ et $-$; et de même que ces derniers indiquent qu'un point est situé sur l'axe, de même $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ indiquent des points qui sont situés sur la droite menée par l'origine perpendiculairement à l'axe, et cela de façon que $+\sqrt{-1}$ corresponde à $\uparrow\frac{\pi}{2}$, et $-\sqrt{-1}$ à $\uparrow\frac{3\pi}{2}$.

Pas plus que les signes $+$ et $-$, les signes $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ ne nous apprennent quelque chose concernant le *devenir* du point; $+\sqrt{-1}\,.\,a$ représente, par exemple, $a\uparrow\frac{\pi}{2}$, ou $a\uparrow\frac{5\pi}{2}$, ou $a\uparrow-\frac{11\pi}{2}$ etc., et $-\sqrt{-1}\,.\,a$ peut tenir lieu de $a\uparrow\frac{3\pi}{2}$, ou de $a\uparrow\frac{7\pi}{2}$, ou de $a\uparrow-\frac{\pi}{2}$ etc. Lors donc qu'il s'agit de tenir compte non-seulement de la situation du point, mais aussi de la manière dont il y est arrivé, on ne peut faire aucun usage des signes $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

17. De ce qui a été dit au n° 9, il suit que tout nombre complexe $r\uparrow\varphi$ peut être mis sous la forme d'une somme de deux nombres complexes. Supposons, par exemple, que le point P (fig. 4) soit indiqué par $r\uparrow\varphi$, et construisons sur OP comme diagonale un parallélogramme quelconque OP_1PP_2, dont les sommets P_1 et P_2 soient représentés par $a\uparrow\alpha$ et $b\uparrow\beta$; on a alors:

$$a\uparrow\alpha + b\uparrow\beta = r\uparrow\varphi.$$

Comme cas particulier on a, en faisant $OP_3 = p$ et $OP_4 = q$:

$$p\uparrow 0 + q\uparrow\frac{\pi}{2} = r\uparrow\varphi,$$

ou, d'après la notation établie ci-dessus:

$$+p + \sqrt{-1}\,.\,q = r\uparrow\varphi \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (16)$$

La figure montre d'ailleurs comment, à l'aide des formules $p = r \cos\varphi$, $q = r \sin\varphi$, $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ et $tg\,\varphi = \frac{q}{p}$, on peut passer d'une de ces expressions à l'autre. Il faut toutefois remarquer, à cet égard, que r n'a qu'une valeur unique (absolue), et que, même dans le cas où il est tenu convenablement compte des signes de p et de q, la valeur de φ reste indéterminée, en ce sens qu'on a aussi $tg(\varphi \pm 2n.180^\circ) = \frac{q}{p}$, de sorte que $+p + \sqrt{-1}.q$ représente aussi bien le point $r \uparrow (\varphi + 2n.180^\circ)$ que le point $r \uparrow \varphi$.

18. On voit par les considérations développées jusqu'ici que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres complexes, ainsi qu'une puissance ou une racine quelconque d'un nombre complexe donnent toujours pour résultat un nombre complexe; toute forme complexe, quelle que soit sa complication, et à condition seulement de ne renfermer que les nombres complexes mentionnés jusqu'à présent, pourra donc aussi être réduite à un seul nombre complexe. Un exemple simple nous est offert par ce qui suit: les racines de l'équation

$$z^3 + pz + q = 0$$

sont données par la formule de Cardan sous la forme

$$z = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}.$$

Dans le cas dit irréductible, on a $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$; en posant dans ce cas

$$\frac{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} . \sqrt{-1}}{-\frac{q}{2}} = Tg\,(2k\pi + \varphi),$$

on obtient:

$$z = \sqrt[3]{\left[\sqrt{-\frac{p^3}{27}} \uparrow (2k\pi + \varphi)\right]} + \sqrt[3]{\left[\sqrt{-\frac{p^3}{27}} \uparrow (2k_1\pi - \varphi)\right]}.$$

Si l'on considère maintenant que le produit de deux termes correspondants du second membre doit être égal à $-\frac{p}{3}$, on trouve immédiatement que, pour les diverses valeurs de k et k_1, on ne peut avoir pour z que les valeurs différentes suivantes:

$$z_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\uparrow\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-\frac{p}{3}}\uparrow\left(2\pi - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\uparrow\frac{2\pi+\varphi}{3} + \sqrt{-\frac{p}{3}}\uparrow\frac{4\pi-\varphi}{3},$$

et

$$z_3 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\uparrow\frac{4\pi+\varphi}{3} + \sqrt{-\frac{p}{3}}\uparrow\frac{2\pi-\varphi}{3},$$

et par conséquent, en appliquant la form. (1):

$$z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\,Cos\,\frac{\varphi}{3},$$

$$z_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\,Cos\,\frac{2\pi+\varphi}{3},$$

et

$$z_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\,Cos\,\frac{4\pi+\varphi}{3}.$$

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

§ 4.

Les fonctions exponentielles.

19. Des équations $1\uparrow\alpha\,.\,1\uparrow\beta = 1\uparrow(\alpha+\beta)$ et $a^\alpha\,.\,a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ il suit que le caractère spécial représenté par l'équation

$$f(\alpha)\,.\,f(\beta) = f(\alpha+\beta)$$

appartient aussi bien à la fonction $1\uparrow\alpha$ qu'à a^α. Cette analogie

de caractère porte à présumer que $1\uparrow\alpha$, de même que a^α, peut être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de α [1]). Posons à cet effet (a étant regardé comme un nombre absolu):

$$1\uparrow\alpha = a^{p\alpha} = 1 + \frac{\alpha . pla}{1} + \frac{\alpha^2(pla)^2}{1.2} + \frac{\alpha^3(pla)^3}{1.2.3} + \ldots, \quad (17)$$

on a alors aussi:

$$1\uparrow-\alpha = a^{-p\alpha} = 1 - \frac{\alpha . pla}{1} + \frac{\alpha^2(pla)^2}{1.2} - \frac{\alpha^3(pla)^3}{1.2.3} + \ldots, \quad (18)$$

et par conséquent, puisque $1\uparrow\alpha + 1\uparrow-\alpha = 2\,Cos\,\alpha\uparrow 0$ et $1\uparrow\alpha - 1\uparrow-\alpha = 2\,Sin\,\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}$,

$$+\,Cos\,\alpha = 1 + \frac{\alpha^2(pla)^2}{1.2} + \frac{\alpha^4(pla)^4}{1.2.3.4} + \ldots, \ldots \quad (19)$$

et

$$Sin\,\alpha\uparrow\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha . pla}{1} + \frac{\alpha^3(pla)^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5(pla)^5}{1.2\ldots5} + \ldots, \quad (20)$$

En divisant cette dernière équation par α, et passant ensuite à la limite $\alpha = 0$, on obtient $1\uparrow\frac{\pi}{2} = pla$, et par conséquent:

$$p = \frac{1}{la}\uparrow\frac{\pi}{2}.$$

La substitution de cette valeur dans les équations précédentes nous donne les séries pour $1\uparrow\pm\alpha$, pour $Cos\,\alpha$ et pour $Sin\,\alpha$, ainsi que:

$$1\uparrow\pm\alpha = a^{\pm\frac{\alpha}{la}\uparrow\frac{\pi}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ou, en remplaçant $\frac{\alpha}{la}$ par α_1:

$$a^{\pm\alpha_1\uparrow\frac{\pi}{2}} = 1\uparrow\pm\alpha_1\,la \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

---

[1]) Il est d'autant plus nécessaire de prouver d'abord que cette présomption est fondée, que les propriétés des exposants sont transportées ici sans limitation aucune aux coefficients de direction.

Si l'on multiplie maintenant les membres correspondants des séries obtenues,

$$a^{\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} = 1 \pm \frac{\alpha\, la}{1}\uparrow\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\alpha\, la\uparrow\frac{\pi}{2}\right)^2}{1\,.\,2} \pm \frac{\left(\alpha\, la\uparrow\frac{\pi}{2}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \quad (23)$$

et

$$a^{\alpha_1} = 1 + \frac{\alpha_1 la}{1} + \frac{(\alpha_1 la)^2}{1\,.\,2} + \frac{(\alpha_1 la)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots, \ldots \quad (24)$$

on trouve :

$$a^{\alpha_1}.a^{\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\left(\alpha_1\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}\right) la}{1} + \frac{\left[\left(\alpha_1\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}\right) la\right]^2}{1\,.\,2} + \ldots \quad (25)$$

et comme le second membre de cette équation s'obtient en remplaçant dans (24) α_1 par $\alpha_1 \pm \alpha\uparrow\frac{\pi}{2}$, on posera la définition :

$$a^{\alpha_1}\,.\,a^{\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} = a^{\alpha_1\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

En écrivant dans l'exposant, tout comme dans les fonctions algébriques, $+\sqrt{-1}$ au lieu de $\uparrow\frac{\pi}{2}$, les équations ci-dessus prennent la forme :

$$a^{\pm\sqrt{-1}.\alpha_1} = 1\uparrow\pm\alpha_1\,.\,la \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

et

$$a^{\alpha_1\pm\sqrt{-1}.\alpha} = a^{\alpha_1}\,.\,a^{\pm\sqrt{-1}.\alpha}, \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

de sorte qu'on a :

$$P = a^{\alpha_1\pm\sqrt{-1}.\alpha} = a^{\alpha_1\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} = a^{\alpha_1}\uparrow\pm\alpha la, \;.\;. \quad (29)$$

équation qui montre que $\pm\sqrt{-1}\,.\,\alpha$ et $\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}$ n'influent en rien sur la valeur numérique de P, mais indiquent seulement que cette valeur numérique doit être prise dans la direction $\pm\alpha\, la$.

20. Si l'on remplace maintenant a par e, on a $le = 1$, par conséquent:

$$e^{\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} = e^{\pm\sqrt{-1}.\alpha} = 1\uparrow\pm\alpha \;\ldots\ldots\; (30)$$

et

$$e^{\alpha_1\pm\alpha\uparrow\frac{\pi}{2}} = e^{\alpha_1\pm\sqrt{-1}.\alpha} = e^{\alpha_1}\uparrow\pm\alpha, \;\ldots\; (31)$$

ensuite, à raison des form. (1) et (3):

$$\frac{e^{+\sqrt{-1}.\alpha} + e^{-\sqrt{-1}.\alpha}}{2} = Cos\,\alpha \;\ldots\ldots\; (32)$$

et

$$\frac{e^{+\sqrt{-1}.\alpha} - e^{-\sqrt{-1}.\alpha}}{2} = +\sqrt{-1}\,.\,Sin\,\alpha\,.\,.\;(33)$$

Pour $\alpha = 2k\pi$, etc., ces équations donnent:

$$e^{+\sqrt{-1}.2k\pi} = 1\uparrow 2k\pi = +1 \;(v.\,d.)$$

$$e^{+\sqrt{-1}.(k+\frac{1}{2})\pi} = 1\uparrow(k+\tfrac{1}{2})\pi = \pm\sqrt{-1}\,.\,1 \;(v.\,d.)$$

etc., expression où *v. d.* signifie *valeur directe.*

On déduit aussi de

$(1\uparrow a)^p = 1\uparrow ap = (1\uparrow p)^a$: $\left(e^{+\sqrt{-1}.a}\right)^p = e^{+\sqrt{-1}.ap} = \left(e^{+\sqrt{-1}.p}\right)^a$,

$1\uparrow a\,.\,1\uparrow b = 1\uparrow(a+b)$: $e^{+\sqrt{-1}.a}\,.\,e^{+\sqrt{-1}.b} = e^{+\sqrt{-1}.(a+b)}$,

etc., tandis que de $a^{+\sqrt{-1}\,.\,\alpha} = 1\uparrow\alpha\, l\, a$, pour $a = e^q$, il suit

$$(e^q)^{+\sqrt{-1}.\alpha} = 1\uparrow q\alpha = e^{+\sqrt{-1}.q\alpha}, \;\ldots\; (34)$$

où q représente un nombre absolu.

21. On voit, par ce qui précède, que $+\sqrt{-1}$ $\left(\text{ou aussi } \uparrow\frac{\pi}{2}\right)$, dans l'exposant d'une puissance, n'est qu'un *signe*, qui indique la *direction* dans laquelle doit être prise la valeur absolue de cette

puissance, et non, comme les signes + et — [1]), des *opérations* à exécuter sur la racine de cette puissance. De cette différence de signification, il suit que les règles pour les exposants dits réels ne peuvent pas être appliquées sans réserve aux exposants *complexes;* c'est ainsi que de $(a^p)^q = a^{pq}$ on ne peut pas conclure à $\left(a^{+\sqrt{-1}.p}\right)^q = a^{+\sqrt{-1}.pq}$, ni à $\left(a^{+\sqrt{-1}.p}\right)^{+\sqrt{-1}.q} = a^{-pq}$, parce qu'il n'existe pas ici une analogie *véritable.* La première conclusion mènerait à un résultat vrai, la seconde à un résultat faux (n° 34), attendu que du signe $+\sqrt{-1}$, *indicateur d'une direction* (non de *la* direction), on ne peut pas passer au signe —, *indicateur d'une opération* [2]), à moins que, dans l'exposant aussi, on ne voulût attribuer à ce signe —, une seconde signification, ce qui entraînerait une grande confusion. Dans la suite de notre travail, nous distinguerons donc les exposants, à raison de leur caractère spécial, en *exposants de l'opération* et *exposants de la direction*, ces derniers étant ceux qui sont affectés du signe $+\sqrt{-1}$ $\left(\text{ou} \uparrow \frac{\pi}{2}\right)$. La valeur absolue de la puissance est déterminée par les premiers, la direction dans laquelle cette valeur absolue doit être prise est indiquée par les seconds. Les exposants de l'opération et ceux de la direction sont donc des grandeurs *hétérogènes*, qui n'ont rien de commun, si ce n'est la place qu'elles

---

[1]) Si dans $e^{\pm p}$ on prend + et — dans le sens de $\uparrow 2k\pi$ et $\uparrow (2k+1)\pi$, on a $e^{+p} = +e^p$, et $e^{-p} = +\frac{1}{e^p}$, de sorte que e^{+p} et e^{-p} ne sont plus des nombres absolus.

[2]) En opérant ainsi, on raisonnerait par exemple de la manière suivante: de $e^{+\sqrt{-1}.2k\pi} = 1$, il suit $e^{1+\sqrt{-1}.2k\pi} = e$ et par conséquent $\left(e^{1+\sqrt{-1}.2k\pi}\right)^{1+\sqrt{-1}.2k\pi} = e^{1-4k^2\pi^2+\sqrt{-1}.4k\pi}$, mais aussi $= e^{1+\sqrt{-1}.2k\pi} = e$; par suite, vu qu'on a $e^{1+\sqrt{-1}.4k\pi} = e$, on aurait aussi $e^{-4k^2\pi^2} = 1$, résultat évidemment faux (Voir: Lieblein *Aufgaben aus der Algebr. Analysis,* Prag 1867, p. 100).

occupent, et qui en conséquence (comme nous l'avons déjà fait remarquer ci-dessus) ne peuvent être transformées l'une dans l'autre. Pour déterminer la signification de l'expression bicomplexe $a^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.q)}$, on doit examiner comment le second signe $+\sqrt{-1}$ est entré dans l'exposant; c'est ce dont nous nous occuperons au § 6.

§ 5.

Les fonctions logarithmiques.

22. Par logarithme d'un nombre, on entend l'exposant de la puissance à laquelle un nombre *absolu* [1]), constant, doit être élevé pour produire le premier nombre. En tenant compte de ce qui précède, il suit de cette définition que le logarithme d'un nombre absolu est représenté par l'exposant de l'opération, c'est-à-dire, par un nombre absolu, qui peut être affecté du signe —, pour indiquer que le nombre primitif est le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est 1; dans le logarithme d'un nombre complexe, outre cet exposant de l'opération, entre encore l'exposant de la direction. En prenant, par exemple, $r = e^p$, on a: $r \uparrow \alpha = e^p \uparrow \alpha = e^{p+\sqrt{-1}.\alpha}$, et par conséquent $lr = p$ et $l(r \uparrow \alpha) = p + \sqrt{-1}.\alpha = lr + \sqrt{-1}.\alpha$; de même, on a: $r \uparrow \alpha = a^{\frac{p}{la} + \sqrt{-1}.\frac{\alpha}{la}}$, et par conséquent, dans le système de logarithmes dont la base est a, $log_a(r \uparrow \alpha) = \dfrac{p}{l\,a} + \sqrt{-1}.\dfrac{\alpha}{l\,a} =$
$= log_a\, r + \sqrt{-1}.\dfrac{\alpha}{l\,a}$.

---

[1]) Quelques auteurs regardent la base d'un système de logarithmes comme un nombre *positif*: de $(+a)^n = (a \uparrow 2k\pi)^n = a^n \uparrow 2kn\pi$, il suit qu'on ne peut alors prendre que $k = 0$ et par conséquent la valeur directe de $+a$, c'est-à-dire, $a \uparrow 0$. Dans cette hypothèse, toutefois, il ne saurait être question de logarithmes de nombres absolus (Voir no 13).

Il résulte de là, que le logarithme d'un nombre complexe n'est que le logarithme du module considéré comme nombre absolu, avec addition, toutefois, de l'exposant de la direction, c'est-à-dire d'un terme qui, directement ou indirectement, marque la direction dans laquelle est pris ce module, regardé comme nombre complexe. Ce dernier terme n'a donc aucune influence sur la valeur numérique du logarithme, pas plus que sur la valeur numérique d'une expression dans laquelle se présentent des opérations sur des nombres complexes. Pour trouver la valeur d'une pareille expression, on peut faire usage des logarithmes, tout comme si l'on n'avait affaire qu'à des nombres absolus, à la seule condition de déterminer la direction dans laquelle doit être pris le résultat absolu auquel on est parvenu.

23. La similitude de *forme* de $a+\sqrt{-1}\,.\,b$ et $p+\sqrt{-1}.q$ dans l'équation

$$l(a+\sqrt{-1}\,.\,b) = p+\sqrt{-1}\,.\,q \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

conduit à écrire

$$l\left(\sqrt{a^2+b^2}\uparrow \text{arc } Tg\,\frac{b}{a}\right) = \sqrt{p^2+q^2}\uparrow \text{arc } Tg\,\frac{q}{p};$$

Mais les considérations précédentes montrent immédiatement que, par cette manière d'écrire, la signification du signe $+\sqrt{-1}$ dans le logarithme est perdue de vue. Tandis que dans (35) a et b représentent des nombres de même nature (absolus), p et q sont d'espèces différentes, puisque q indique (en rayons) la longueur de l'arc qui détermine la direction. Ce qui a été dit, au nº 21, de l'exposant de l'opération et de celui de la direction s'applique évidemment aussi à p et à q, de sorte que le second terme du logarithme d'un nombre complexe ne peut jamais être transformé dans le premier [1]). Pour mieux tenir compte à la fois

[1]) On trouve, par exemple, à tort: $l(\sqrt{-1}\,.\,1)^{\sqrt{-1}\,.\,1} = \sqrt{-1}.1.\left(0+\sqrt{-1}.\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, et, par suite, $-2\sqrt{-1}.l(\sqrt{-1}.1) = \pi$ (Voir form. 47).

de l'analogie de *forme* de $a + \sqrt{-1} . b$ et $p + \sqrt{-1} . q$ dans l'éq. (35) et de la différence de signification de $\sqrt{-1}$ dans ces deux expressions, on peut écrire $l(a + \sqrt{-1} . b) = p \downarrow q$ et par conséquent aussi $l(r \uparrow \alpha) = lr \downarrow \alpha$, et $log_a(r \uparrow \alpha) = (log_a r) \downarrow \frac{\alpha}{la}$.

De $r \uparrow \alpha = e^{lr + \sqrt{-1} . \alpha}$ et $r_1 \uparrow \alpha_1 = e^{lr_1 + \sqrt{-1} . \alpha_1}$ on déduit alors $r \uparrow \alpha . r_1 \uparrow \alpha_1 = e^{lr + lr_1 + \sqrt{-1} . (\alpha + \alpha_1)}$, $r \uparrow \alpha : r_1 \uparrow \alpha_1 = e^{lr - lr_1 + \sqrt{-1} . (\alpha - \alpha_1)}$, et $(r \uparrow \alpha)^p = e^{plr + \sqrt{-1} . p\alpha}$ (pour toute valeur absolue de p), par conséquent aussi:

$$l(r \uparrow \alpha . r_1 \uparrow \alpha_1) = (lr + lr_1) \downarrow (\alpha + \alpha_1)$$

$$l(r \uparrow \alpha : r_1 \uparrow \alpha_1) = (lr - lr_1) \downarrow (\alpha - \alpha_1)$$

et

$$l(r \uparrow \alpha)^p = (plr) \downarrow p\alpha, \text{ etc.}$$

ce qui prouve que les indicateurs des directions doivent être soumis aux mêmes opérations que les logarithmes eux-mêmes.

24. En prenant maintenant aussi en considération les directions indirectes, il suit de

$$+ a = a \uparrow 0, = a \uparrow 2\pi, = \ldots, = a \uparrow 2n\pi, \ldots$$

si, a étant pris comme nombre absolu, on a $la = p$:

$$l(+ a) = p \downarrow 0, = p \downarrow 2\pi, = \ldots, = p \downarrow 2n\pi, \ldots$$

Ces expressions „différentes" ont conduit à la proposition: que tout nombre positif a une infinité de logarithmes [1]); cette proposition, toutefois, ne subsiste que dans un sens très restreint, différent de celui dans lequel $+ a$ lui-même a une infinité de valeurs.

---

[1]) La notation $l(+ a) = la + \sqrt{-1} . 2n\pi$ devait conduire Euler à la conclusion que, de tous ces logarithmes, il n'y en avait qu'un seul de réel, celui qui correspond à $n = 0$ (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, a⁰ 1749).

On trouve de même:

$$l(-a) = p \downarrow \pi, \; = p \downarrow 3\pi, \; = \ldots\ldots, \; = p \downarrow (2n+1)\pi, \ldots.$$

$$l(+\sqrt{-1}.a) = p \downarrow \frac{\pi}{2}, = p \downarrow \frac{5\pi}{2}, = \ldots\ldots, = p \downarrow (2n+\tfrac{1}{2})\pi, \ldots.$$

$$l(-\sqrt{-1}.a) = p \downarrow \frac{3\pi}{2}, = p \downarrow \frac{7\pi}{2}, = \ldots\ldots, = p \downarrow (2n-\tfrac{1}{2})\pi, \ldots.$$

$$l(+1) = 0 \downarrow 0, \; = 0 \downarrow 2\pi, \; = \ldots\ldots, \; = 0 \downarrow 2n\pi, \ldots.$$

etc., et en outre, lorsqu'on tient compte des directions indirectes:

$$l(a + \sqrt{-1}\,.\,b) = [\tfrac{1}{2}\, l\,(a^2 + b^2)] \downarrow (\text{arc } Tg \frac{b}{a} + k\pi) \;. \quad (36)$$

25. Lorsque l'origine, la naissance d'un nombre complexe est connue, ce nombre n'a qu'un seul logarithme naturel, celui du module, auquel est joint l'amplitude du nombre complexe, pour indiquer la direction qui doit être prise en considération, comme étant celle du nombre primitif.

La même chose s'applique, en observant que $log_a\,(r \downarrow \alpha) = (log_a\, r) \downarrow \frac{\alpha}{l\,a}$, à un système quelconque de logarithmes. Ici surtout, le caractère spécial et les avantages du système logarithmique naturel s'accusent fortement.

26. Nous devons encore faire remarquer que les formules

$$l\,(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{-1}\,.\,x) = \sqrt{-1}\,.\,\text{arc } Sin\, x,$$

$$l\,(x + \sqrt{x^2-1}) = \sqrt{-1}\,.\,\text{arc } Cos\, x,$$

$$l\,\frac{a + \sqrt{-1}\,.\,b}{a + \sqrt{-1}\,.\,b} = 2\sqrt{-1}\,.\,\left(\text{arc } Tg\,\frac{b}{a} \pm k\pi\right),$$

etc., qui découlent immédiatement des équations identiques

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{-1}.x = 1 \uparrow \text{arc } Tg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \uparrow \text{arc } Sin\, x, \text{ pour } x \leqq 1,$$

$$1 \uparrow \varphi = Cos\, \varphi + \sqrt{-1}\,.\,Sin\, \varphi, \text{ pour } Cos\, \varphi = x$$

$$\frac{a + \sqrt{-1}\,.\,b}{a - \sqrt{-1}\,.\,b} = 1 \uparrow \left(2 \text{ arc } Tg\,\frac{b}{a} \pm 2k\pi\right),$$

etc., subsistent seulement en tant qu'on ne perd pas de vue les significations de $\sqrt{-1}$.

27. Les considérations que nous venons de développer reposent sur l'idée, si féconde en conséquences, de distinguer en Mathématique entre les directions directe, indirecte et réelle d'une ligne située *dans* un plan, par rapport à un axe situé dans ce même plan. L'honneur de l'introduction de ce principe revient tout entier à M. G. C. Louwenrier, qui dans sa *Théorie complète des nombres complexes* (avec *Complément*), Zalt-Bommel, 1872, a essayé le premier de la mettre en application. Dans cet ouvrage on trouve aussi pour la première fois le signe ↑, employé dans le sens que nous avons adopté ici. Le mode de traitement que nous suivrons plus loin pour la polydromie de la fonction $w = \sqrt[n]{(z + p_1)}$ a également été indiqué d'abord par M. Louwenrier.

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS BICOMPLEXES.

---

§ 6.

Les fonctions bicomplexes.

28. Si, dans les formules (32) et (33), pour α on substitue $+\sqrt{-1}\,.\alpha$, on obtient:

$$Cos(+\sqrt{-1}.\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(e^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} + e^{(-\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha))}\right), \quad (37)$$

et

$$Sin(+\sqrt{-1}.\alpha) = \frac{1}{+2\sqrt{-1}.1}\left(e^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} - e^{-\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)}\right), \quad (38)$$

d'où l'on déduit:

$$e^{\pm\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} = Cos(+\sqrt{-1}.\alpha) \pm \sqrt{-1}\,.\,Sin(+\sqrt{-1}.\alpha)$$

ou, suivant la notation établie:

$$e^{\pm\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} = 1 \uparrow (\pm\sqrt{-1}.\alpha) \;.\;.\;.\;.\;.\; (39)$$

De cette manière, le second signe $+\sqrt{-1}$ est introduit par *substitution* dans les exposants et, en même temps, dans les fonctions goniométriques. Il s'agit maintenant de déterminer à postériori ce qu'il faut entendre par la *direction complexe* $+\sqrt{-1}.\alpha$. Dans le plan, toutefois, il est impossible d'attribuer à l'expression arc $(+\sqrt{-1}.\alpha)$ une signification quelconque (W. Matzka, *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra*, Prag, 1850, § 124); on est obligé, pour cela, d'avoir recours aux figures dans l'espace.

29. Si l'on prend pour plan de représentation un plan déterminé, indéfini, V, et dans ce plan une droite déterminée OX pour axe, avec le point O pour point de départ (origine), l'angle XOP est considéré comme positif (fig. 1), et l'angle XOP_1 comme négatif, lorsque OP et OP_1 sont situés aux deux côtés de OX dans le plan V. Si $XOP = -XOP_1 = \alpha$, XOP sera changé, par rotation de OP autour de OX, en XOP_1, lorsque dans cette rotation le point P aura parcouru un demi-cercle, c'est-à-dire, l'arc π. En indiquant cette dernière condition par $\uparrow\uparrow\pi$, on a: $\alpha\uparrow\uparrow\pi = -\alpha$. Si dans cette rotation le point P décrit en sens positif un arc **a**, et que cette nouvelle position de OP soit représentée par OA, on a angle $XOA = \alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a}$; **a** est ici la mesure de l'angle dièdre que le plan mené par OX et OA fait avec le plan fixe V, cet angle étant évalué dans le sens de la rotation. Lorsque la droite OP décrit un cercle entier, 1, 2, ... k fois, elle revient chaque fois en OP, de sorte que la direction de OP par rapport à OX est indiquée aussi bien par $\alpha\uparrow\uparrow 2\pi$, $\alpha\uparrow\uparrow 4\pi$, ..., $\alpha\uparrow\uparrow 2k\pi$, que par $\alpha\uparrow\uparrow 0$; de même, la direction de OA n'est pas seulement donnée par $\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, mais aussi par $\alpha\uparrow\uparrow(\mathbf{a}\pm 2\pi)$, $\alpha\uparrow\uparrow(\mathbf{a}\pm 4\pi)$... $\alpha\uparrow\uparrow(\mathbf{a}\pm 2k\pi)$, ... etc. On doit donc, ici encore, distinguer les directions directe, indirecte et réelle (§ 1). Il faut remarquer, en outre, que les directions réelles (positive et négative) sont impliquées dans la direction complexe, plus générale, $\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, tout comme les nombres réels sont impliqués dans le nombre complexe $r\uparrow\alpha$.

30. De même que, au § 1, $a \uparrow \alpha$ a été représenté par un point sur un plan, on peut aussi indiquer par un point la direction complexe $\alpha \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, à savoir, par le point où cette direction coupe la surface d'une sphère décrite avec un rayon quelconque autour de l'origine O comme centre. Si dans cette sphère un plan arbitraire V, passant par l'origine, est pris pour plan fixe, et dans ce plan un rayon OX pour axe, chaque point P de la surface sphérique est déterminé sans équivoque par les coordonnées α et $\mathbf{a}$, dont α indique la direction de OP par rapport à OX, prise dans le plan qui peut être mené par OP et OX, tandis que $\mathbf{a}$ désigne l'angle plan qui mesure l'angle dièdre que ce plan fait avec le plan V. Le point P est indiqué, de même que la direction OP, par $\alpha \uparrow\uparrow \mathbf{a}$.

On peut aussi, outre le plan fixe V, prendre un second plan W, qui coupe V perpendiculairement suivant OX, ou, ce qui revient au même, considérer les arcs des grands cercles suivant lesquels ces plans V et W coupent la sphère. Si alors on détermine le point P par les arcs p et q, qui sont détachés de ces grands cercles, à compter du point d'intersection de la sphère avec OX, par les grands cercles menés par P perpendiculairement aux précédents [1]), P est aussi désigné par $p \uparrow\uparrow 0 + q \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}$.

31. En tenant compte de la signification modifiée de α, $\mathbf{a}$, p et q, les considérations des §§ précédents peuvent être appliquées à ces directions complexes, pourvu que les définitions du § 2 soient convenablement étendues. Ces considérations deviennent toutefois plus compliquées, en ce sens que, partout où il était fait usage de la trigonométrie rectiligne, il faut maintenant recourir à la trigonométrie sphérique. Ainsi, par exemple, $+ \sqrt{-1} \,.\, \alpha$ indique que la direction, qui fait un angle α avec celle de OX, doit être prise dans le plan W, qui passe par OX et est perpendiculaire au plan V, de sorte qu'on a:

---

[1]) Cette détermination d'une direction est usitée en Astronomie.

$$+\sqrt{-1}\,.\,\alpha = \alpha \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}, \ (v.\ d.)$$

et $$-\sqrt{-1}\,.\,\alpha = \alpha \uparrow\uparrow \frac{3\pi}{2}, \ (v.\ d.)$$

Pour l'expression trouvée ci-dessus, $p \uparrow\uparrow 0 + q \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}$, on peut donc aussi écrire $+p+\sqrt{-1}\,.\,q$. Si l'on veut réduire cette expression binôme à la forme monôme $\alpha \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, il faut que dans celle-ci α représente un nombre absolu, indiquant la grandeur du troisième côté d'un triangle sphérique, dont p et q sont les autres côtés, lesquels comprennent entre eux un angle droit, tandis que **a** est l'angle compris entre les côtés α et p. On trouve ainsi:

$$+p+\sqrt{-1}.q = [\text{arc } Cos\,(Cos\,p\ Cos\,q)] \uparrow\uparrow [\text{arc } Tg\,(Tg\,q\ Cos\acute{e}c\,p)] \quad (40)$$

et réciproquement

$$\alpha \uparrow\uparrow \mathbf{a} = +\text{arc } Tg\,(Tg\,\alpha\ Cos\,\mathbf{a}) + \sqrt{-1}\,.\,\text{arc } Sin\,(Sin\,\alpha\ Sin\,\mathbf{a}). \quad (41)$$

(Comparer cette transformation avec celle de $+p+\sqrt{-1}\,.\,q$ en $a \uparrow \alpha$). Si z représente une direction complexe déterminée $\alpha \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ (direction dans l'espace), on peut toujours, quelle que soit la complication éventuelle des calculs, ramener $f(z)$ à la forme $\varrho \uparrow\uparrow r$.

---

32. Pour attacher maintenant une signification géométrique à $e^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} = 1 \uparrow (+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$, il faut raisonner ainsi: au lieu de $1 \uparrow (+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$ on peut écrire $1 \uparrow \left(\alpha \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire, que $1 \uparrow (+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$ représente un point P dans l'espace, qui est situé dans le plan W passant par OX et perpendiculaire au plan V; de telle sorte qu'on a: OP $= 1$ et angle XOP $= \alpha$.

Dans $e^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)}$, le premier $+\sqrt{-1}$ a donc rapport à l'angle que OP forme avec la droite OX, et l'autre $+\sqrt{-1}$

à l'angle plan qui mesure l'angle dièdre compris entre le plan XOP et le plan V, de sorte qu'on ne peut *pas* écrire: $e^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} = e^{-\alpha}$. Par conséquent, les équations (37) et (38) ne peuvent pas non plus être écrites sous la forme

$$Cos\,(+\sqrt{-1}\,.\,\alpha) = \tfrac{1}{2}\,(e^{-\alpha} + e^{\alpha})$$

et $$+\sqrt{-1}\,.\,Sin\,(+\sqrt{-1}\,.\,\alpha) = \tfrac{1}{2}\,(e^{-\alpha} - e^{\alpha}).$$

(C'est à tort qu'on admet, comme base de développements analytiques ultérieurs, ces dernières équations à titre de définitions de $Cos\,(+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$ et de $Sin\,(+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$, sans se préoccuper de la représentation graphique des résultats ainsi obtenus).

Si ensuite on prend $e^q = r$, on a aussi

$$e^{q+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} = r \uparrow \left(\alpha \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

formule dont la signification découle immédiatement de ce qui précède. Les nombres complexes ordinaires $r \uparrow \alpha = r \uparrow (\alpha \uparrow\uparrow 2k\pi)$ sont un cas particulier de ces nombres *bicomplexes*, plus généraux.

Quant à la signification de $a^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)}$, il est facile de la déduire de ce qui vient d'être dit: en substituant dans la form. (27) $+\sqrt{-1}\,.\,\alpha$ à α_1, on obtient

$$a^{+\sqrt{-1}.(+\sqrt{-1}.\alpha)} = 1 \uparrow (+\sqrt{-1}\,.\,\alpha\, l\, a), \quad . \; . \; . \; . \quad (43)$$

d'où la signification en question se dégage immédiatement.

33. Même pour une valeur déterminée de α, les équations (37) et (38) ne peuvent *rien* nous apprendre au sujet des valeurs de $Cos\,(+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$ et de $Sin\,(+\sqrt{-1}\,.\,\alpha)$, pas plus que les équations (32) et (33) au sujet des valeurs de $Cos\,\alpha$ et de $Sin\,\alpha$. Dans chacune de ces équations, les deux membres représentent une seule et même chose, exprimée de deux manières différentes; ce sont par conséquent des équations *identiques*. On peut en déduire d'autres équations identiques, de la même manière que cela se fait, en Analyse, pour $Tg\,(\alpha + \sqrt{-1}.\beta)$, arc $Sin\,(p + \sqrt{-1}.q)$, etc.

Si on donne alors à $Sin(\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a})$, $Cos(\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a})$, etc. la signification qu'on leur attribuerait dans le plan de l'angle $\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, on a pour ces relations goniométriques, que nous représenterons par *Gon.*, l'équation

$$Gon.(\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a}) = (Gon.\,\alpha)\uparrow\uparrow\mathbf{a},$$

d'où l'on conclut cette proposition: Si l'on décrit autour de OX comme axe, avec O pour sommet, un cône circulaire, les relations goniométriques des directions marquées par les génératrices du cône ont *la même grandeur;* pour chacune de ces relations doit toutefois être mentionnée la grandeur de l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par le plan fixe V avec le plan qui contient OX et la génératrice en question.

Les formules fondamentales de la goniométrie,

$$Sin(p+q) = Sin\,p\,Cos\,q + Sin\,q\,Cos\,p,$$

etc. (et par conséquent aussi toutes celles qu'on en déduit) restent alors applicables, pourvu que les angles p et q soient situés dans le même plan et se présentent par suite sous la forme $\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a}$ et $\beta\uparrow\uparrow\mathbf{a}$; lorsque cela n'est pas le cas, la valeur de $Sin(p+q)$, etc. ne peut être déterminée qu'à l'aide de la trigonométrie sphérique.

Comme d'ailleurs $Cos(\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a})$ est la seule des relations goniométriques susdites qui soit mesurée dans le plan fixe V, par conséquent sur l'axe OX, on dit ordinairement, avec assez peu de justesse, que $Cos(\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a})$ a une valeur réelle.

---

34. Nous avons enfin à chercher encore la signification de $(r\uparrow\alpha)^{b\uparrow\beta}$. Soit, à cet effet, $r=e^a$, on a alors $r\uparrow\alpha = e^{a+\sqrt{-1}.\alpha}$; soit, en outre, $b\uparrow\beta = m+\sqrt{-1}.n$, on obtient:

$$(r\uparrow\alpha)^{b\uparrow\beta} = (e^{a+\sqrt{-1}.\alpha})^{m+\sqrt{-1}.n} = e^{am+\sqrt{-1}.(\alpha m+an+\sqrt{-1}.\alpha n)} =$$
$$= e^{am}\uparrow(\alpha m + an + \sqrt{-1}.\alpha n).$$

La valeur de la direction $\alpha m + an + \sqrt{-1} \, . \, \alpha n$ doit maintenant être déterminée en appliquant ce qui a été dit au n°. 31. Par substitution dans la form. (40) on trouve:

$$[\text{arc } Cos\,(Cos\,(\alpha m + an)\; Cos\,\alpha n)] \uparrow\uparrow [\text{arc } Tg\,(Tg\,\alpha n\; Cos\acute{e}c\,(\alpha m + an))]$$

et par conséquent:

$$(r \uparrow \alpha)^{m + \sqrt{-1}\,.\,n} = r^m \uparrow \{[\text{arc } Cos\,(Cos\,(\alpha m + an)\; Cos\,\alpha n)] \uparrow\uparrow [\text{arc } Tg\,(Tg\,\alpha n\; Cos\acute{e}c\,(\alpha m + an)]\} \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

Pour $m = 0$ cette formule se change en:

$$(r \uparrow \alpha)^{+\sqrt{-1}\,.\,n} = 1 \uparrow \{[\text{arc } Cos\,(Cos\,an\; Cos\,\alpha n)] \uparrow\uparrow [\text{arc } Tg\,(Tg\,\alpha n\; Cos\acute{e}c\,an)]\}, \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

et celle-ci, pour $r = 1$ et par suite $a = 0$, en:

$$\left(e^{+\sqrt{-1}\,.\,\alpha}\right)^{+\sqrt{-1}\,.\,n} = 1 \uparrow \left(an \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}\right), \; (v.\ d.) \; \ldots (46)$$

qui donne à son tour, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $n = 1$:

$$(+\sqrt{-1}\,.\,1)^{+\sqrt{-1}\,.\,1} = 1 \uparrow \left(\frac{\pi}{2} \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}\right), \; (v.\ d.) \; \ldots (47)$$

Enfin on déduit de (45), pour $a = 1$ et $\alpha = 2k\pi$:

$$\left(e^{1 + \sqrt{-1}\,.\,2k\pi}\right)^{+\sqrt{-1}\,.\,n} = 1 \uparrow \{[\text{arc } Cos\,(Cos\,n\; Cos\,2k\pi n)] \uparrow\uparrow [\text{arc } Tg\,(Tg\,2k\pi n\; Cos\acute{e}c\,n)]\} \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

et par conséquent ce n'est que pour $k = 0$ et $n =$ un nombre entier qu'on a:

$$(+e)^{+\sqrt{-1}\,.\,n} = 1 \uparrow (n \uparrow\uparrow 0) = e^{+\sqrt{-1}\,.\,n} \quad \ldots\ldots (49)$$

De même que $+\sqrt{-1}\,.\,1$ est regardé comme l'*unité complexe*, $(+\sqrt{-1}\,.\,1)^{+\sqrt{-1}\,.\,1}$ peut être aussi considéré comme l'*unité bicomplexe*. Tout point P dans l'espace se laisse représenter par l'expression

$$+1\,.\,a + (+\sqrt{-1}\,.\,1)\,.\,b + (+\sqrt{-1}\,.\,1)^{+\sqrt{-1}\,.\,1}c,$$

au lieu de laquelle on peut aussi écrire:

$$+a+b\uparrow\frac{\pi}{2}+c\uparrow\left(\frac{\pi}{2}\uparrow\uparrow\frac{\pi}{2}\right),$$

où a, b et c indiquent les coordonnées rectangulaires de P. Si l'on représente P par $r\uparrow(\alpha\uparrow\uparrow\mathbf{a})$, r, α et $\mathbf{a}$ sont les coordonnées polaires du point P, de sorte que le passage d'une expression à l'autre peut se faire par l'application des formules ordinaires de la géométrie analytique de l'espace.

CHAPITRE IV.

LA POLYDROMIE DES FONCTIONS.

---

§ 7.

Cause de la polydromie.

35. Lors du passage de la forme $p+\sqrt{-1}\,.q$ à $r\uparrow\varphi$, et lors de la réduction de cette dernière forme, on ne fait ordinairement aucune attention à la manière dont cette expression *est* née, mais on se contente d'indiquer comment elle *aurait pu* naître de la manière la plus simple. C'est ainsi qu'on se borne à écrire: $(-a)^7=-a^7$, $(-\sqrt{-1})^5=-\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^4=+1$, $\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}}=\sqrt[8]{-1}$, etc. En ce qui concerne la représentation graphique, ce mode d'agir n'a aucun inconvénient pour les expressions algébriques, lorsqu'elles ne renferment pas de radicaux, parce que la valeur d'une pareille expression, après qu'elle a été réduite à la direction directe (à sa valeur directe ou principale), indique le même point que sa valeur réelle. Mais si cette expression se trouve sous un signe radical, on doit, pour

en faire connaître la signification, la prendre dans sa direction réelle. A défaut de cette direction indirecte réelle, on est obligé de considérer aussi les autres directions indirectes. *La circonstance que, pour une expression complexe placée sous un signe radical, la direction réelle n'est pas donnée, est la cause de la polydromie des fonctions algébriques.*

Il ne pourraît être question de *polydromie* des fonctions, si, pour chaque grandeur complexe, on indiquait non-seulement la direction dans laquelle elle se trouve, mais aussi explicitement la manière dont elle est arrivée dans cette situation. Ainsi on pourrait écrire pour les exemples ci-dessus:

$$(-a)^7 = (a \uparrow \pi)^7 = a^7 \uparrow 7\pi; \quad (-\sqrt{-1}\,.\,1)^5 = \left(1 \uparrow \frac{3\pi}{2}\right)^5 = 1 \uparrow \frac{15\pi}{2};$$

$$(+\sqrt{-1}\,.\,1)^4 = \left(1 \uparrow \frac{\pi}{2}\right)^4 = 1 \uparrow 2\pi; \quad \sqrt{(-\sqrt{-\sqrt{-1}})} = 1 \uparrow \frac{7\pi}{8};$$

etc., ou aussi:

$$(-a)^7 = (a \uparrow 3\pi)^7 = a^7 \uparrow 21\pi; \quad (-\sqrt{-1}\,.1)^5 = \left(1 \uparrow \frac{7\pi}{2}\right)^5 = 1 \uparrow \frac{35\pi}{2}; \text{ etc.}$$

En adoptant cette notation, il n'y aurait plus lieu de distinguer les directions en directes et indirectes; les valeurs multiples des fonctions affectées du signe radical $\sqrt[n]{\pm a}$ disparaîtraient, à une seule près, puisque $\pm a$ indiquerait par sa direction déterminée la valeur réelle; par conséquent, chaque fonction n'aurait qu'une seule signification.

36. Soit maintenant $z = r \uparrow \varphi$ une variable complexe, dans laquelle r ou φ, ou tous les deux, varient d'une manière continue, de sorte que z prenne une série de valeurs formant une succession continue, depuis $z_1 = a \uparrow \alpha$ jusqu'à $z_2 = b \uparrow \beta$; soit, en outre, w une fonction algébrique de z, c'est-à-dire, $w = f(z)$; w sera alors une nouvelle variable complexe, dont les variations dépendront de celles de z, de façon qu'à chaque valeur arbitraire de z correspondront une ou plusieurs valeurs déterminées de w. Si P_1 et P_2 sont les représentations de z_1 et z_2, et qu'on fasse

parcourir à z la ligne $P_1 P_2$, les valeurs correspondantes de w, figurées dans le plan des w (V_w) formeront une ou plusieurs autres lignes $Q_1 Q_2$, telles qu'à chaque point P de $P_1 P_2$ se rapporteront un ou plusieurs points déterminés Q des lignes $Q_1 Q_2$.

37. Si, de plus, $f(z)$ est une fonction *algébrique rationnelle*, il n'y aura, pour chaque point P, qu'un seul point correspondant dans le plan des w, parce qu'il est alors indifférent que l'on prenne pour z les valeurs directes ou les valeurs indirectes des points de $P_1 P_2$. En effet, si l'on a dans ce cas pour $z = r \uparrow \varphi$, $w = R \uparrow \psi$, on devra avoir (§ 2) pour $z = r \uparrow (2k\pi + \varphi)$, $w = R \uparrow (2k_1\pi + \psi)$, expressions dans lesquelles k et k_1 ne peuvent représenter que des nombres entiers. Or, comme $R \uparrow (2k_1\pi + \psi)$ est représentée dans le plan des w par le même point que $R \uparrow \psi$, à chaque point du plan des z il ne se rapportera qu'un seul point du plan des w; une fonction qui possède cette propriété est appelée une fonction *monodrome* (*eindeutig*).

38. Si $w = f(z)$ est une fonction *algébrique irrationnelle*, c'est-à-dire, si dans cette fonction z se trouve sous un signe radical, la pluralité des valeurs indirectes de z peut être cause qu'à un seul point arbitraire du plan des z correspondent plusieurs, par exemple n valeurs du plan des w. Dans ce cas, la fonction est *polydrome* (*vieldeutig*). Si alors z parcourt la ligne $P_1 P_2$, les valeurs correspondantes de w seront représentées par n lignes, et chacune de ces lignes correspondra à une certaine direction indirecte de z, de sorte qu'à chaque point de $P_1 P_2$ se rapporteront n points différents, situés successivement sur $Q_1 Q_2$, $Q_3 Q_4$, $Q_5 Q_6$, etc. Le cas peut ici se présenter que, pour un point déterminé P d'une ligne $P_1 P_2$ dans le plan des z, un ou plusieurs facteurs placés sous un signe radical dans un des termes de la fonction $w = f(z)$ deviennent *nuls* ou *infinis*, soit que l'on prenne z dans la direction directe ou dans une direction indirecte. Dans ce cas, deux ou plusieurs des lignes différentes, qui représentent dans le plan des w les valeurs de w correspondantes à la ligne $P_1 P_2$ située dans le plan V_z, peuvent avoir un point commun. Cela arrivera même toujours, si un seul des termes de la fonction

w devient infini, et aussi s'il devient zéro et que la fonction ait la forme $w = F_1(z) + \sqrt[n]{F_2(z)}$, où $F_1(z)$ et $F_2(z)$ représentent des fonctions algébriques rationnelles de z. Le point P du plan des z, qui indique la valeur de z pour laquelle un ou plusieurs facteurs affectés d'un signe radical (pourvu que le nombre n'en soit pas égal à l'indice de la racine, ou multiple de cet indice) deviennent nuls ou infinis dans un ou plusieurs termes de la fonction w, ce point P, dis-je, porte le nom de *point de ramification.*

39. Si l'on a: $w = \sqrt{z}$. . . . . (50)

et que z passe, le long de l'axe, de $z_1 = +1$ à $z_2 = -1$, il peut se présenter deux cas: le passage de z peut se faire ou bien de $1 \uparrow 2k\pi$ à $1 \uparrow (2k+1)\pi$, ou bien de $1 \uparrow 2k\pi$ à $1 \uparrow (2k-1)\pi$. Cela dépendra de la question de savoir si la droite $P_1 P_2$ (fig. 5) doit être regardée comme provenant d'une ligne courbe $P_1 P_3 P_2$ ou d'une ligne courbe $P_1 P_4 P_2$, lignes qui, réunies, enferment l'origine.

Dans le premier cas, il est nécessaire et suffisant de rechercher quels points de V_w correspondent aux valeurs successives de z, lorsque z passe le long de l'axe de $1 \uparrow 0$ à $1 \uparrow \pi$, et aussi de $1 \uparrow 2\pi$ à $1 \uparrow 3\pi$. Jusqu'au point O, on a lors du premier passage $z = r \uparrow 0$ et par conséquent $w = \sqrt{r} \uparrow 0$, lors du second $z = r \uparrow 2\pi$ et $w = \sqrt{r} \uparrow \pi$, r décroissant, dans chacun des deux passages, de 1 à 0. A l'origine, les valeurs de z sont égales, attendu qu'un point O ne peut pas être dit situé dans une certaine direction par rapport à ce même point O. Pour $z = 0$, w devient également 0, et coïncide donc aussi, pour chacun des deux groupes, avec l'origine. Dans la suite du mouvement, z a les valeurs $r \uparrow \pi$ et $r \uparrow 3\pi$, et w par conséquent les valeurs $\sqrt{r} \uparrow \frac{\pi}{2}$ et $\sqrt{r} \uparrow \frac{3\pi}{2}$, de sorte que la valeur absolue de w croît, tout comme celle de z, de 0 à 1. On arrive donc à ce résultat: si l'on a $OA = OB = A_1O = B_1O = 1$ et $OP_1 = P_2O = 1$, et que $P_1 OP_2$ provienne de la ligne courbe $P_1 P_3 P_2$, la fonction w prendra, lorsque z passe de P_1 suivant

l'axe à P_2, des valeurs qui passeront de A par O en B, ou de A_1 par O en B_1, selon que la valeur initiale de z est $z_1 = 1 \uparrow 0$ ou $z_1 = 1 \uparrow 2\pi$.

Si l'on attribue à la droite $P_1 P_2$ la seconde des deux origines en question, le passage de z suivant l'axe aura lieu de $1 \uparrow 0$ à $1 \uparrow -\pi$, ou bien de $1 \uparrow 2\pi$ à $1 \uparrow \pi$. Des considérations entièrement analogues aux précédentes conduisent alors au résultat suivant: lors de ce passage de z de P_1 à P_2, suivant l'axe, la valeur de la fonction w passe de A par O en B_1, ou de A_1 par O en B, selon que pour la valeur initiale de z on prend $z_1 = 1 \uparrow 0$ ou $z_1 = 1 \uparrow 2\pi$.

Du point O partent donc quatre branches, qui sont liées deux à deux, si le mode de naissance de la droite $P_1 P_2$ est connu. Ordinairement, toutefois, cette connaissance fait défaut, de sorte qu'on ne peut plus décider si c'est OB ou OB_1 qui doit être regardée comme la continuation soit de AO, soit de A_1O; chacune des lignes AO, A_1O se divise donc alors en deux branches au point O. C'est cette circonstance qui a conduit M. Riemann à désigner le point du plan des z, qui correspond au point d'intersection O du plan des w, sous le nom de „point de ramification” (*Verzweigungspunct*); il attribue ce même nom à $z = \infty$ par rapport à $w = f(z)$, lorsque $z = 0$ se présente comme point de ramification de $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

§ 8.

Fonctions algébriques monômes.

40. Une variable complexe z pouvant passer de P_1 à P_2 suivant une infinité de chemins continus, il faut examiner si le chemin parcouru a de l'influence sur la valeur de w, qui correspond à $z = P_2$, et, en cas d'affirmative, jusqu'où cette influence s'étend. Lorsque $w = f(z)$ est une fonction algébrique rationnelle, en d'autres termes, une fonction monodrome de z, cet examen est superflu; car, si l'on a $OP_2 = r$ et angle $XOP_2 = \alpha$, z ne peut

prendre pour le point P_2, quel que soit le chemin par lequel elle parvienne en ce point, que les valeurs $z_2 = r \uparrow (\alpha \pm 2 k \pi)$, qui, substituées dans une fonction monodrome, donnent pour w un seul et même point du plan des w (n° 37). Mais lorsqu'il s'agit d'une fonction polydrome, un point déterminé du plan des z correspond, en général, à plus d'un point du plan des w, de sorte que, dans ce cas, rien n'exclut à priori la possibilité que des chemins différents, parcourus dans le plan des z vers un point déterminé, conduisent à des points différents dans le plan des w. L'examen de cette question se réduit à l'examen de l'influence que le parcours de ces différents chemins exerce sur la valeur de l'expression binôme $z + p_1$, comme nous allons le montrer.

41. Soit $$w = \sqrt[n]{z + p_1}, \qquad (51)$$

où nous attribuons à p_1 une valeur déterminée, directe ou indirecte. Lorsque z va par des chemins différents de P_1 à P_2, ces chemins n'ont aucune influence sur la valeur de w, s'ils donnent, au point P_2, la même valeur pour $z + p_1$. Si $P_1 P_3 P_2$ et $P_1 P_4 P_2$ sont deux de ces chemins (fig. 6^a), on trouve les valeurs de $z + p_1$ en prenant dans la fig. 6^b le point $Q = p_1$, et construisant ensuite sur $QT // OX$ une figure $Q Q_1 Q_3 Q_2 Q_4$ congruente avec $O P_1 P_3 P_2 P_4$, de façon que QT soit homologue à OX (§ 2). Les points Q_1 et P_1, Q_2 et P_2, ainsi que les lignes $Q_1 Q_3 Q_2$ et $P_1 P_3 P_2$, $Q_1 Q_4 Q_2$ et $P_1 P_4 P_2$ se correspondent alors. Si OQ_2 est $= r$ et l'angle $XOQ_2 = \varphi$, on a $Q_2 = r \uparrow \varphi$, que $z + p_1$ ait parcouru le chemin $Q_1 Q_3 Q_2$ ou le chemin $Q_1 Q_4 Q_2$.

Mais si l'on fait parcourir à z deux chemins de telle nature que les chemins correspondants de $z + p_1$ enferment l'origine, les valeurs que $z + p_1$ prend en Q_2 différeront de direction. En supposant que les deux lignes $Q_1 Q_3 Q_2$ et $Q_1 Q_5 Q_2$, parcourues par $z + p_1$, soient disposées comme le montre la fig. 7, et que par le premier chemin on ait en Q_2 $z + p_1 = r \uparrow \varphi$, on aura par le second $z + p_1 = r \uparrow (\varphi + 2\pi)$. Dans le cas, au con-

traire, où les deux lignes $Q_1 Q_3 Q_2$ et $Q_1 Q_6 Q_2$ enferment l'origine de la façon indiquée dans la fig. 8, on a par le second chemin, en Q_2, $z + p_1 = r \uparrow (\varphi - 2\pi)$.

Ainsi, lorsque les deux chemins que z parcourt de P_1 à P_2 sont tels que les chemins correspondants de $z + p_1$ enferment l'origine, les valeurs de $z + p_1$, et par conséquent aussi celles de w dans $w = \sqrt[n]{(z + p_1)}$, qui correspondent au point d'arrivée P_2, diffèrent entre elles. Il reste donc à savoir dans quel cas les chemins décrits par $z + p_1$ enferment l'origine. Or, de la construction de ces chemins, il suit immédiatement que cela est toujours et uniquement le cas lorsque les chemins $P_1 P_3 P_2$ et $P_1 P_5 P_2$, ou $P_1 P_3 P_2$ et $P_1 P_6 P_2$ (fig. 7 et 8), que parcourt z, enferment le point P, situé par rapport à O tout comme O est situé par rapport à Q. Ce point P est le point $-p_1$, c'est-à-dire, un point de ramification de la fonction $w = \sqrt[n]{z + p_1}$, puisque cette fonction, pour $z = -p_1$, donne $w = 0$. Lors donc que les deux chemins, que z parcourt pour passer de P_1 à P_2, enferment le point de ramification $z = -p_1$ de la fonction $w = \sqrt[n]{z + p_1}$, w présente pour $z = P_2$ des valeurs différentes, suivant qu'on choisit pour le passage de z l'un ou l'autre de ces chemins.

Mais si z parcourt les deux chemins $P_1 P_3 P_2$ et $P_1 P P_2$ (fig. 9[a]), dont le second passe par le point de ramification $P = -p_1$, $z + p_1$ décrira les chemins $Q_1 Q_3 Q_2$ et $Q_1 O Q_2$ (fig. 9[b]), dont le second passe par l'origine, attendu qu'à $z = -p_1$ correspond $z + p_1 = 0$. Il dépendra alors du mode de production de la ligne $P_1 P P_2$ que les deux chemins donnent ou ne donnent pas pour $z = P_2$ la même valeur de w. Si $P_1 P P_2$ est provenue de $P_1 P_7 P_2$, ces valeurs de w, correspondantes à $z = P_2$, seront les mêmes; si au contraire $P_1 P P_2$ provient de $P_1 P_8 P_2$, ces valeurs sont différentes et on obtient les mêmes résultats que lorsque les chemins parcourus par z enferment le point $z = -p_1$.

42. Si, dans les considérations précédentes, on laisse le point P_2 se rapprocher successivement de P_1 et enfin se confondre avec lui, z finit par parcourir une ligne fermée, et il dépend de l'égalité ou de l'inégalité des valeurs de $z + p_1$ pour P_2 que la

valeur initiale de w, correspondante à $z = P_1$, ait ou n'ait pas le même coefficient de direction que la valeur finale de w, celle qui correspond à $z = P_2$ ou à la fin du parcours de la ligne fermée. Or, de ce qui a été dit plus haut, nous pouvons déduire immédiatement les conséquences suivantes:

Lorsque le point de ramification est situé *en dehors* de la ligne fermée que z parcourt en partant de P_1, les valeurs de w, correspondantes à $z = P_1$, sont les mêmes avant et après le mouvement; le cas où le point de ramification se trouve *sur* la ligne fermée que décrit z doit rester, comme cas douteux, hors de considération. Si le point de ramification est situé *en dedans* de la courbe décrite par z, les valeurs initiale et finale de w, correspondantes à $z = P_1$, différeront par leur coefficient de direction. En supposant que $w_1 = \varrho \uparrow \psi$ soit la valeur de w qui correspond à $z = P_1$ au début du mouvement, cette valeur sera devenue, après que z aura parcouru la ligne fermée successivement 1, 2, ... k fois etc. en sens positif:

$$w_2 = \varrho \uparrow \left(\psi + \frac{2\pi}{n}\right) = w_1 . 1 \uparrow \frac{2\pi}{n}; \quad w_3 = \varrho \uparrow \left(\psi + \frac{4\pi}{n}\right) = w_1 . 1 \uparrow \frac{4\pi}{n};$$

$$\ldots\ldots w_{k+1} = \varrho \uparrow \left(\psi + \frac{2k\pi}{n}\right) = w_1 . 1 \uparrow \frac{2k\pi}{n}; \ldots,$$

valeurs qui sont toutes comprises dans la forme $w = w_1 . \sqrt[n]{+1}$.

Ces n valeurs différentes de w, qui correspondent à $z = P_1$, s'accordent en grandeur numérique et ne diffèrent que par le coefficient de direction; de sorte que tous les points qui représentent ces valeurs dans le plan des w sont situés à la même distance p de l'origine O, et cela de telle façon qu'ils forment exactement les sommets d'un polygone régulier de n côtés, décrit autour de O comme centre.

Ce qui vient d'être établi pour P_1 s'applique évidemment à chaque point de la ligne fermée que parcourt z, d'où résulte cette règle:

Si l'on a $w = \sqrt[n]{z + p_1}$, et que z parcoure successivement n fois dans le même sens une ligne fermée, qui entoure le point

de ramification $-p_1$, *les valeurs correspondantes de* w *sont représentées dans le plan des* w *par* n *lignes contiguës, qui forment ensemble (en apparence) une ligne fermée unique, et qui sont situées de telle sorte que lorsque, autour de l'origine comme centre, on décrit des cercles, les points d'intersection de ces lignes avec un pareil cercle correspondent* n *à* n *à un même point de la ligne parcourue par* z. *Ces* n *lignes sont par conséquent congruentes ; elles diffèrent seulement par leur situation à l'égard de l'axe, tandis que l'origine se présente comme point homologue commun de ces* n *lignes.*

Pour le cas ou z parcourt la ligne fermée dans le sens négatif, il n'y a rien à changer aux considérations qui précèdent, sauf qu'alors les points du plan des w qui correspondent à $z = P_1$ sont obtenus dans un ordre inverse, et que par conséquent w aussi décrit en sens inverse la ligne fermée dont il a été question ci-dessus.

43. Prenons maintenant la fonction monôme générale

$$w = \sqrt[n]{\frac{(z+p_1)(z+p_2)(z+p_3)\ldots\ldots(z+p_m)}{(z+p_r)(z+p_s)(z+p_t)\ldots\ldots(z+p_u)}}, \quad (52)$$

où $-p_1, -p_2, \ldots -p_m, -p_r, -p_s, \ldots -p_u$ sont autant de points de ramification. Supposons que z, partant de P_1, parcoure une ligne fermée qui entoure un certain nombre de points de ramification, et cela de façon que, des points $-p_1, -p_2, \ldots -p_m$ compris dans le numérateur, k_1 soient contournés en sens positif et k_2 en sens négatif, tandis que, des points $-p_r, -p_s, \ldots -p_u$ du dénominateur, k_3 soient contournés en sens positif et k_4 en sens négatif; si alors $w_1 = \varrho \uparrow \psi$ est la valeur de w qui correspond à la valeur initiale $z = P_1$, on aura après la première révolution $w_2 = \varrho \uparrow \left(\psi + \frac{2\pi(k_1 - k_2 - k_3 + k_4)}{n}\right)$, ou, en faisant $k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = k$, $w_2 = \varrho \uparrow \left(\psi + \frac{2k\pi}{n}\right)$; de même après la seconde révolution $w_3 = \varrho \uparrow \left(\psi + \frac{4k\pi}{n}\right)$, etc., de sorte que

les valeurs de w, qui correspondent à $z = P_1$, sont comprises dans la forme $w = w_1 (\sqrt[n]{+1})^k$.

Des valeurs de k et de n dépendra maintenant la question de savoir combien de points différents du plan des w correspondront au point P_1 : si k et n sont premiers entre eux, il y aura n de ces points; si k est zéro, ou égal à n, ou un multiple de n, il n'y aura qu'un seul point, etc. En général, on a pour les points du plan des w qui correspondent à $z = P_1$ la règle suivante: déterminez le point $Q_1 = \varrho \uparrow \psi$ qui correspond à la valeur initiale $z = P_1$; décrivez de O comme centre et avec ϱ pour rayon un cercle; divisez ce cercle en n parties égales, de manière que Q_1 devienne le premier de ces points de division; en faisant alors le tour dans le sens positif, les 1er (Q_1), $(k+1)^e$, $(2k+1)^e$... $((n-1)k+1)^e$ points de division seront les points du plan des w qui correspondent à $z = P_1$, respectivement à l'origine du mouvement, après la 1ère, 2e ... $(n-1)^e$ révolution. Lorsque k et n ont un diviseur commun, les n points ne sont pas tous affectés de cette manière. Si par exemple le plus grand commun diviseur de k et de n est p, et que p soit contenu n_1 fois en n, on a:

$$w = w_1 . (\sqrt[n]{+1})^k = w_1 . (\sqrt[n_1]{+1})^{\frac{k}{p}},$$

et cette expression donne, quoique dans un autre ordre, les mêmes points du plan des w que l'expression $w = w_1 \sqrt[n_1]{+1}$. Dans ce cas, à un point P_1 du plan des z correspondront donc n_1 points du plan des w. Par conséquent, si z parcourt n fois une ligne fermée, w décrira une ligne fermée composée de n_1 parties congruentes, lesquelles auront O pour point homologue commun, comme le montre par exemple, pour $n = 12$, $k = 9$, la fig. 10.

44. Le cas particulier, où quelques points de ramification coïncident, est compris dans ce cas général; toutefois, si le nombre de ces points coïncidents est égal à n ou à an, les révolutions successives autour de ce point multiple n'auront, d'après ce qui précède, d'autre effet sur la valeur de w que d'augmenter chaque

fois de 2π ou de $a.2\pi$ le coefficient de direction. Que ce point soit situé en dehors ou en dedans de la ligne fermée, cela n'a donc aucune influence sur le point du plan des w qui correspond à $z = P_1$. D'ailleurs, si l'on a

$$w = \sqrt[n]{(z + p_1)^{an} (z + p_2)},$$

on peut écrire au lieu de cette expression:

$$w = (z + p_1)^a \sqrt[n]{(z + p_2)},$$

ce qui met encore mieux en évidence la réalité de ce que nous venons de dire.

La présence d'un facteur rationnel devant le signe radical n'exerce donc d'influence ni sur le nombre, ni sur l'ordre de succession, ni sur la situation des points du plan des w qui correspondent à $z = P_1$.

Pour ce qui concerne l'introduction des valeurs indirectes des points de ramification, ainsi que pour plus de détails et d'exemples, je renvoie au Mémoire déjà cité (*N. A.*).

§ 9.

La fonction algébrique générale.

45. La fonction algébrique générale $w = f(z)$ peut être écrite sous la forme:

$$w = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots\ldots + f_k(z), \quad \ldots \quad (53)$$

où $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_k(z)$ représentent des fonctions algébriques monômes quelconques; or, sous cette forme, il est facile d'étendre à la fonction générale les considérations développées ci-dessus.

Pour cela, attribuons des valeurs déterminées, directes ou indirectes, aux points de ramification qui entrent dans la fonction; faisons parcourir à z, en partant de P_1, une ligne fermée qui entoure un ou plusieurs de ces points; admettons qu'à la valeur initiale $z = P_1$ correspondent, dans le plan des w, pour $w = f_1(z)$ le point α_1, pour $w = f_2(z)$ le point β_1, ... pour $w = f_k(z)$ le

point $\varkappa_1$, et de même, après la première révolution, respectivement les points α_2, β_2, ... $\varkappa_2$, etc.; soient, enfin, c_1 le nombre des points ainsi obtenus pour $w = f_1(z)$, c_2 celui pour $w = f_2(z)$, ... c_k celui pour $w = f_k(z)$; alors, dans la supposition que l'on ait $c_1 < c_2 < \ldots . < c_k$, à la valeur initiale $z = \mathrm{P}_1$ correspondra pour la fonction générale $w = f(z)$, dans le plan des w, le point

$$w_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \ldots . + \varkappa_1;$$

et successivement, après la première, la seconde, ... la $(c_1 - 1)^e$, ... $(c_2 - 1)^e$, ... $(c_k - 1)^e$, ... révolution, les points

$$w_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \ldots . + \varkappa_2,$$

$$w_3 = \alpha_3 + \beta_3 + \ldots . + \varkappa_3,$$

. . . .

$$w_{c_1} = \alpha_{c_1} + \beta_{c_1} + \ldots . + \varkappa_{c_1},$$

. . . .

$$w_{c_2} = \alpha_{c_2 - c_1} + \beta_{c_2} + \ldots . + \varkappa_{c_2},$$

. . . .

$$w_{c_k} = \alpha_{c_k - c_1} + \beta_{c_k - c_2} + \ldots . + \varkappa_{c_k},$$

Enfin, si l'on a:

$$l = ac_1 + p = bc_2 + q = \ldots . = hc_k + v,$$

le point du plan des w, qui correspond à $z = \mathrm{P}_1$ après la $(l-1)^e$ révolution, sera

$$w_l = \alpha_p + \beta_q + \ldots + \varkappa_v.$$

Pour déterminer maintenant le nombre des points différents qui correspondent dans le plan des w à $z = \mathrm{P}_1$, il faut chercher pour quelle valeur de l on a $w_l = w_1$. Or cela est le cas, — attendu qu'il n'y a à tenir compte que de la situation des points, — lorsqu'on a $p = q = \ldots = v = 1$, et que par conséquent l surpasse d'une unité le plus petit multiple commun de c_1, c_2, ... c_k.

Ainsi, $w = f(z)$ étant une fonction algébrique quelconque de z, et z parcourant d'un mouvement continu une ligne fermée, le nombre des points du plan des w, qui correspondent à un seul et même point P_1 de cette ligne, sera égal au plus petit multiple commun des nombres qui indiquent combien de points du plan des w correspondraient respectivement à ce point P_1, si la fonction en question était successivement réduite à chacun de ses termes.

Tous ces points du plan des w, qui après les différentes révolutions de z sur la ligne fermée correspondent à $z = P_1$, sont compris dans la forme

$$w = \alpha_1 \cdot \sqrt[n_1]{+1} + \beta_1 \sqrt[n_2]{+1} + \ldots, \varkappa_1 \sqrt[n_k]{+1}$$

et peuvent être obtenus par une permutation cyclique des valeurs qui y entrent.

46. Bien que la règle donnée soit d'une application générale, nous devons encore considérer le cas particulier où l'une des fonctions $f_k(z)$ ne se présente pas sous la forme $\sqrt[n]{F(z)}$, dans laquelle $F(z)$ représente une fonction algébrique rationnelle. Nous avons alors à chercher le nombre des points qui correspondent dans le plan des w à $z = P_1$ lorsque w est de la forme

$$w = \sqrt[n_1]{F_1(z) + \sqrt[n_2]{F_2(z)}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

$F_1(z)$ et $F_2(z)$ étant des fonctions algébriques quelconques.

De ce qui a été dit plus haut, il est facile de déduire combien de points du plan des w correspondraient à $z = P_1$ si l'on avait $w = F_1(z)$ ou $w = \sqrt[n_2]{F_2(z)}$. Supposons que pour $w = F_1(z)$ ces points soient en nombre c_1, à savoir, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{c_1}$, et pour $w = \sqrt[n_2]{F_2(z)}$ en nombre c_2, à savoir, β_1, $\beta_2, \ldots \beta_{c_2}$, de telle sorte que les points α_1 et β_1, α_k et β_k aient un même mode de génération, c'est-à-dire, correspondent à P_1 après un même nombre de révolutions. Pour la fonction w en question (54), on trouve alors les points $\sqrt[n_1]{\alpha_1 + \beta_1}$, $\sqrt[n_1]{\alpha_2 + \beta_2}, \ldots \sqrt[n_1]{\alpha_l + \beta_l}, \ldots$ Le nombre des points dans le plan des w s'obtient en remarquant que, pour $l = a c_1 + p = b c_2 + q$, $\sqrt[n_1]{\alpha_1 + \beta_1}$ et $\sqrt[n_1]{\alpha_l + \beta_l}$

représenteront les mêmes points, s'il est satisfait à ces conditions, d'abord qu'on ait $p = q = 1$ et par conséquent aussi $ac_1 = bc_2$, et en second lieu que n_1 soit compris un nombre entier de fois dans ac_1 et dans bc_2. La plus petite valeur de l, pour laquelle ces conditions soient remplies, est supérieure d'une unité au plus petit multiple commun de n_1, c_1 et c_2. Si u désigne ce plus petit multiple commun, $\sqrt[n_1]{\alpha_{u+k} + \beta_{u+k}}$ indique le même point que $\sqrt[n]{\alpha_k + \beta_k}$, de sorte qu'au point P_1 du plan des z correspondent u points du plan des w.

Il faut remarquer ici que les valeurs de z qui rendent la fonction $F_2(z)$ nulle ou infinie ne sont pas seules des points de ramification, mais que cela est aussi le cas de celles pour lesquelles $F_1(z) + \sqrt[n_2]{F_2(z)}$ devient nulle ou infinie.

On traitera de la même manière la fonction:

$$w = \sqrt[n]{\{F_1(z) + \sqrt[n_2]{[F_2(z) + \ldots + \sqrt[n_k]{F_k(z)}]}\}} \quad . \; . \; (55)$$

§ 10.

Les fonctions exponentielles et logarithmiques.

47. Si dans $w = e^z$ on donne à z des valeurs complexes, par exemple celles qui sont indiquées par les points successifs d'une ligne du plan des z, la valeur de w correspondante à chacun de ces points peut être écrite sous la forme $w = e^{p + \sqrt{-1} \cdot q} = e^p \uparrow q$. Remarquant ensuite que (pour un point dans le plan) on a $p + \sqrt{-1} \cdot q = r \, Cos \, \alpha + \sqrt{-1} \cdot Sin \, \alpha = r \uparrow \alpha$ [1]), on voit que

[1]) Pour être, dans l'application de la théorie du calcul intégral, plus indépendants de la nature des fonctions considérées, nous avons dû traiter de la polydromie de ces fonctions. Sous beaucoup de rapports, nous avons suivi à cet égard la manière de voir ordinaire; mais il est indispensable de bien tenir compte de la signification des grandeurs auxquelles on a affaire: c'est ainsi, par exemple, que dans $z = p + \sqrt{-1} \cdot q$, pour un point du plan des z, p et q sont des nombres absolus, indiquant les longueurs de lignes droites, tandis que $+\sqrt{-1}$ tient lieu de $\uparrow \frac{\pi}{2}$. Dans $w = e^{p + \sqrt{-1} \cdot q}$, au contraire, p est un

cette valeur de w devient par là $w = e^{r\, Cos\, \alpha} \uparrow r\, Sin\, \alpha$, où e et r représentent des nombres absolus, tandis que $r\, Sin\, \alpha$ marque la direction dans laquelle doit être pris $e^{r\, Cos\, \alpha}$.

D'après ce qui a été dit au § 2, la valeur de $f(z)$ peut, pour chaque valeur déterminée de z, être réduite à la forme $r \uparrow \alpha$, de sorte que l'on peut aussi, pour un point quelconque du plan des z, ramener la valeur de $w = e^{f(z)}$ à la forme $e^{r\, Cos\, \alpha} \uparrow r\, Sin\, \alpha$. (On entend donc ici par $w = e^{f(z)}$ la valeur que prend w, lorsque la valeur de w_1 dans $w_1 = f(z)$, pour un point déterminé de V_z, est substituée dans $w = e^{w_1}$).

Si maintenant on fait parcourir à z deux chemins différents du point P_1 au point P_2, et que par l'un de ces chemins on ait pour P_2 $f(z) = r \uparrow \alpha$ et par l'autre chemin $f(z) = r \uparrow (\alpha + m\pi)$, où m peut avoir (§ 8) une valeur quelconque entière ou fractionnaire (ou aussi zéro), on a pour P_2 par le premier chemin $w = e^{r\, Cos\, \alpha} \uparrow r\, Sin\, \alpha$ et par le second chemin $w = e^{r\, Cos\, (\alpha + m\pi)} \uparrow r\, Sin\, (\alpha + m\pi)$. Il en est de même dans le cas où P_2 et P_1

---

nombre absolu, mais $+\sqrt{-1}.q$ indique la direction dans laquelle la puissance absolue e^p doit être prise; q représente alors la longueur de l'arc, exprimée en rayons. A raison de la signification modifiée de $+\sqrt{-1}$ dans l'exposant, on n'est pas autorisé non plus à remplacer, dans celui-ci, $p+\sqrt{-1}.q$ par $r \uparrow \alpha$. En remontant à la série $e^z = +1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$, qui a conduit à l'introduction de $+\sqrt{-1}$ dans l'exposant, et qui est reconnue comme d'une application absolument générale, et en y donnant à z les valeurs $r \uparrow \alpha = p + \sqrt{-1}.q$, on obtient:

$$e^{r \uparrow \alpha} = +1 + r \uparrow \alpha + \frac{r^2}{1.2} \uparrow 2\alpha + \frac{r^3}{1.2.3} \uparrow 3\alpha + \ldots.$$

Or, la sommation du second membre donne un nombre complexe, dont le module est indiqué par le nombre absolu $e^{r\, Cos\, \alpha} = e^p$, et l'amplitude par $r\, Sin\, \alpha = q$. Les expressions $e^{r \uparrow \alpha}$ et $e^{p+\sqrt{-1}.q}$ doivent donc être regardées toutes deux comme des symboles, qui remplacent la série ci-dessus et auxquels doit être attribuée la valeur $e^p \uparrow q$.

coïncident et où par conséquent z parcourt une ligne fermée, de sorte que $w = e^{f(z)}$ et $w = f(z)$ sont simultanément des fonctions *monodromes* ou *polydromes* de z; c'est ainsi que $e^{\sqrt[n]{z+p}}$ est une fonction polydrome, $e^{\frac{z+p}{n}} = \sqrt[n]{e^{z+p}}$ une fonction monodrome.

Comme on a d'ailleurs (voir form. (34)) $a^{f(z)} = (e^{la})^{f(z)} = e^{f(z) \cdot la}$, on peut établir la proposition suivante:

Lorsque l'exposant de la puissance d'un nombre absolu a est une fonction d'une variable complexe z, cette puissance est monodrome ou polydrome, suivant que l'exposant est lui-même une fonction monodrome ou polydrome de z.

Dans le cas où la fonction exponentielle de z est polynôme, les considérations du § 9 sont applicables, et par conséquent la monodromie ou polydromie de cette fonction dépend de celle des termes séparés. Lorsqu'une fonction exponentielle polynôme se trouve sous un signe radical, elle n'est pas encore pour cela polydrome. C'est ainsi que $w = \sqrt[n]{e^{pz} + q}$ est monodrome, attendu que pour $z = r \uparrow (\alpha + 2k\pi)$, $r\, Cos\, (\alpha + 2k\pi) = m$ et $r\, Sin\, (\alpha + 2k\pi) = \mu$, on a toujours $w = \sqrt[n]{e^{pm} \uparrow p\mu + q}$, de sorte qu'à un même point du plan des z ne correspond qu'un seul point du plan des w. Pour la fonction mixte $w = \sqrt[n]{f(z)\, e^{F(z)}}$ on peut écrire $w = e^{\frac{1}{n} F(z)} \cdot \sqrt[n]{f(z)}$, d'où il suit que $e^{F(z)}$ n'exerce aucune influence sur la polydromie de la fonction w, quand $F(z)$ représente une fonction algébrique rationnelle de z.

48. En étendant les considérations du nº précédent, on est conduit à cette question: „quels sont les points du plan des w qui doivent être représentés par w, pour qu'il soit satisfait à l'équation $e^w = f(z)$, ou, ce qui revient au même, à $w = l(f(z))$, lorsque dans cette équation z désigne un point P du plan des z?" Pour chaque valeur indirecte du point P on obtient alors un autre point du plan des w, puisque pour $f(z) = r \uparrow \alpha$ la valeur de w est indiquée par le point $lr + \sqrt{-1} \cdot \alpha$. A ce point de vue, $l(f(z))$ doit

donc toujours être considéré comme une fonction *infinitiforme* de z [1]), et les valeurs de z, pour lesquelles $f(z)$ devient nulle ou infinie, doivent être regardées comme des points de ramification. C'est ainsi que dans $w = \log_a(z+p)$, $z = -p$ et $z = \infty$ sont des points de ramification. Si z parcourt une ligne passant par un de ces deux points, les lignes correspondantes du plan des w, en nombre infini, ont toutes le point commun $w = \infty$, qui pour toutes ces lignes correspond au point $z = -p$ ou $z = \infty$ du plan des z.

§ 11.

Les fonctions bicomplexes.

49. Considérons deux sphères quelconques, traversées chacune par un plan fixe, et dans ce plan un rayon déterminé OX, pris pour axe (voir § 6); soit en outre z une direction complexe variable, indiquée par les points d'une ligne quelconque tracée à la surface d'une des sphères, la sphère des z (B_z); si alors w et z sont liées l'une à l'autre par l'équation $w = f(z)$, les directions w, qui correspondent aux directions successives z, seront indiquées sur l'autre sphère, la sphère des w (B_w), par les points d'une ou de plusieurs lignes. On a donc, ici encore, à faire la distinction en fonctions monodromes et polydromes de z, tandis que les directions de z, pour lesquelles deux ou plusieurs points de la sphère

---

[1]) C'est à tort que tous les logarithmes sont dits polydromes, car d'abord il n'y a que les nombres absolus qui aient un logarithme dans l'acception propre du mot, et ensuite, dans l'acception générale, les logarithmes des nombres complexes sont aussi des nombres absolus, auxquels est seulement jointe l'indication de la direction du nombre complexe *primitif*. Pour les logarithmes, il ne peut donc en réalité être question de monodromie ou de polydromie, pas plus que de représentation graphique. On peut parler seulement de logarithmes de fonctions monodromes ou polydromes, ou encore de fonctions monodromes ou polydromes de logarithmes; c'est ainsi, par exemple, que $w = \sqrt[n]{\log_p z}$ est une fonction polydrome de l'ordre n.

B_w coïncident, doivent être regardées comme des *directions de ramification*; dans $w = \sqrt[n]{\frac{z + p_1}{z + p_2}}$, par exemple, $z = -p_1$ et $z = -p_2$ sont des directions de ramification. Les considérations du § 8 sont applicables dans ce cas, lorsqu'on les rapporte aux sphères B_z et B_w.

50. Tandis que $Sin\, z$, $Cos\, z$, etc. n'ont qu'une seule valeur, on attribue une infinité de valeurs à arc $Sin\, z$, arc $Cos\, z$, etc.

Dans la détermination de $w =$ arc $Sin\, z$, etc. on peut avoir en vue deux objets très différents, à savoir: 1° la direction w pour laquelle le sinus est égal à z, ou 2° la longueur de l'arc dont le sinus est égal à z.

Si, dans le premier cas, p représente un arc (proprement une *direction*) dans le plan, et qu'on ait arc $Sin\, z = p$, on a aussi, il est vrai, arc $Sin\, z = \frac{1}{2}\pi \mp (\frac{1}{2}\pi - p) \pm 2k\pi$, mais toutes ces valeurs ne représentent que deux directions différentes, dont les valeurs directes sont données par p et $\pi - p$. Il en est de même pour les directions dans l'espace; si l'on a $Sin\,(\alpha \uparrow_1 \uparrow \mathrm{a}) = z$, on a aussi $Sin\, \{[\frac{1}{2}\pi \mp (\frac{1}{2}\pi - \alpha) \pm 2k\pi] \uparrow\uparrow (\mathrm{a} \pm 2k_1\pi)\} = z$, mais ici encore $[\frac{1}{2}\pi \mp (\frac{1}{2}\pi - \alpha) \pm 2k\pi] \uparrow\uparrow (\mathrm{a} \pm 2k_1\pi)$ ne représente que deux directions (directes), $\alpha \uparrow\uparrow \mathrm{a}$ et $(\pi - \alpha) \uparrow\uparrow \mathrm{a}$.

En tenant donc compte de ce qui a été dit au § 6 concernant les directions complexes, on voit que arc $Sin\, z$, arc $Cos\, z$, etc. ne peuvent, pas plus que $+a$, $-a$, $+\sqrt{-1}.a$ et $-\sqrt{-1}.a$, être appelés infinitiformes.

Si au contraire, dans $w =$ arc $Sin\, z$, etc., on demande la longueur de l'arc dont le *Sinus*, etc., est z, on obtient deux systèmes de valeurs en nombre infini, et la fonction w peut alors être considérée comme infinitiforme.

CHAPITRE V.

L'ANALYSE DES FONCTIONS DE NOMBRES COMPLEXES.

---

§ 12.

Considérations générales.

51. Toute expression complexe peut être ramenée à la forme $\varrho \uparrow \psi$, et il en est par conséquent de même pour une fonction quelconque de $r \uparrow \varphi$; ϱ et ψ doivent alors être des fonctions analogues de r et de φ. En effet, pour que $\varrho \uparrow \psi$ soit une fonction de $r \uparrow \varphi$, il est absolument nécessaire que r et φ n'entrent dans $\varrho \uparrow \psi$ que sous la combinaison $r \uparrow \varphi$, ce qui n'est pas le cas, par exemple, dans des expressions telles que $r \uparrow 2\varphi$, $r^2 \uparrow -\varphi$, etc. Pour qu'une expression de la forme $w = \varrho \uparrow \psi$ soit une fonction de $z = r \uparrow \varphi$, il faut donc que ϱ et ψ satisfassent à certaines conditions, qu'on peut trouver de la manière suivante.

Puisque w doit être une fonction de z, et que r et φ ne dépendent pas l'un de l'autre, on a:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dr}$$

et

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varphi};$$

mais, attendu que nous regardons la définition ordinaire du quotient différentiel,

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim. \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

comme applicable aussi aux valeurs complexes de z, on a $\frac{dz}{dr} = 1 \uparrow \varphi$ et $\frac{dz}{d\varphi} = r \uparrow \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ [1]), et par conséquent aussi

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dz} \uparrow \varphi \quad \text{et} \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{dw}{dz} \cdot r \uparrow \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

d'où il suit

$$\frac{dw}{d\varphi} = r \frac{dw}{dr} \uparrow \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

comme condition à laquelle w doit nécessairement satisfaire pour être une fonction de z.

Cette condition est d'ailleurs suffisante, ainsi que nous allons le montrer. La différentielle totale de w est

$$dw = \frac{dw}{dr} dr + \frac{dw}{d\varphi} d\varphi = \frac{dw}{dr} \left(dr + r\, d\varphi \uparrow \frac{\pi}{2}\right) = \frac{dw}{dr} dz \uparrow -\varphi.$$

Cette même différentielle, après élimination de r, c'est-à-dire après substitution de $z \uparrow -\varphi$ à r, est

$$dw = \left(\frac{dw}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{dw}{dz}\right) dz,$$

où nous plaçons les coefficients différentiels partiels entre parenthèses, pour les distinguer des précédents. Ce résultat, combiné avec celui qui précède, donne:

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right) d\varphi + \left[\left(\frac{dw}{dz}\right) - \frac{dw}{dr} \uparrow -\varphi\right] dz = 0,$$

et par suite aussi, $d\varphi$ et dz étant indépendants l'un de l'autre,

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right) = 0$$

et

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) - \frac{dw}{dr} \uparrow -\varphi = 0.$$

---

[1]) Lorsque φ est constant, on a $\frac{dz}{dr} = \lim. \frac{(r+\delta) \uparrow \varphi - r \uparrow \varphi}{\delta} = 1 \uparrow \varphi$;

si r est constant, on a $\frac{dz}{d\varphi} = \lim. \frac{r \uparrow (\varphi + \varepsilon) - r \uparrow \varphi}{\varepsilon} = \lim. \frac{2r Sin \frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon} \uparrow \left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$= r \uparrow \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$.

La première équation nous apprend que w, après l'élimination de r, est indépendante de φ, et que par conséquent, lorsqu'on élimine r, φ disparaît également; en d'autres termes, que w dépend de $r \uparrow \varphi$ ou de z. La seconde équation, attendu qu'on a maintenant aussi $\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{dw}{dz}$, donne $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dr} \uparrow - \varphi$.

52. Si w est une fonction de z, on a donc, d'après ce qui précède:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dr} \uparrow - \varphi$$

et

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{r} \frac{dw}{d\varphi} \uparrow - \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right);$$

par conséquent aussi:

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{d\varrho}{dr} + \varrho \frac{d\psi}{dr} \uparrow \frac{\pi}{2}\right) \uparrow (\psi - \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

et

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{r} \left(\varrho \frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{d\varrho}{d\varphi} \uparrow - \frac{\pi}{2}\right) \uparrow (\psi - \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; (58)$$

Ces deux dernières équations sont indépendantes de $\frac{d\varphi}{dr}$ et par conséquent de dz, de sorte que $\frac{dw}{dz}$ est indépendant aussi bien de la *grandeur* que de la *direction* du déplacement du point $z = r \uparrow \varphi$.

La propriété que possède une fonction continue d'une variable réelle z, d'avoir pour chaque valeur de z une fonction dérivée $\frac{dw}{dz}$ par rapport à z, fonction qui est en général déterminée et finie, et qui dépend uniquement de z et non du signe de l'accroissement infiniment petit de z, ni de la façon dont on fait converger cet accroissement vers zéro, — cette propriété appartient donc aussi à une fonction continue d'une variable complexe z. Or, c'est sur cette propriété fondamentale que repose l'application des règles du calcul différentiel et intégral aux fonctions d'une variable réelle; en étendant donc aussi les définitions d'intégrale indéfinie et définie

du cas d'une variable réelle à celui d'une variable complexe, on pourra appliquer aux fonctions de cette dernière les mêmes règles de différentiation et d'intégration qui conviennent aux fonctions d'une variable réelle. On pourra donc calculer, pour toute fonction continue, la *fonction dérivée* ou l'*intégrale indéfinie*, sans avoir à se préoccuper de savoir si la valeur en question de la variable est réelle ou complexe [1]).

53. Pour l'*intégrale définie* $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, ce principe subit toutefois une modification, parce que, dans le cas où z est une variable réelle, z ne peut passer de z_0 à Z que d'une seule manière, tandis que ce passage est susceptible de se faire d'une infinité de manières si z est une variable complexe; dans ce dernier cas, par conséquent, la série des valeurs intermédiaires n'est pas prescrite, mais peut être représentée par une ligne quelconque allant de z_0 à Z. De cette ligne dépend la valeur de l'intégrale, de sorte qu'on doit attribuer provisoirement à la fonction $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ un nombre infini de valeurs. Il faut donc examiner quel rapport existe entre la valeur de cette intégrale définie et les différents chemins que z peut parcourir de z_0 à Z.

---

54. Si z est une variable complexe, qui passe suivant une ligne quelconque de z_0 à Z, de telle sorte que, pour aucun point de cette ligne, $f(z)$ ne devienne infiniment grande ou discontinue [2]),

[1]) Bien entendu qu'on devra montrer préalablement que la *théorie des valeurs-limites*, établie dans l'Analyse algébrique, convient aussi aux variables complexes.

[2]) Pour un même point P, une fonction peut être continue ou discontinue, suivant qu'on considère l'une ou l'autre valeur de ce point P. C'est ainsi que la fonction $\frac{+1}{\sqrt{z}+1}$, au point $z=+1$, est discontinue pour $+1 = 1 \uparrow (4k+2)\pi$ et continue pour $+1 = 1 \uparrow 4k\pi$. Dans le premier cas sa valeur en ce point est ∞, dans le second cas $+\frac{1}{2}$. Pour cette raison, ce point P est aussi appelé un point de ramification. Il en est de même de $\frac{+1}{\sqrt{z^{-1}}+1}$. Lorsque la valeur d'un point de la ligne parcourue est $r \uparrow \alpha$, celle du point suivant est $(r+\varrho)\uparrow(\alpha+\varepsilon)$ et non $(r+\delta)\uparrow(\alpha+2k\pi+\varepsilon)$.

et si l'on prend sur cette ligne une série de points dont les valeurs soient successivement représentées par z_1, $z_2 \ldots z_n$, l'intégrale de $f(z)dz$, entre les limites z_0 et Z, est définie par l'équation identique:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \lim. \left[(z_1 - z_0)f(z_0) + (z_2 - z_1)f(z_1) + \right.$$
$$\left. + (z_3 - z_2)f(z_2) + \ldots + (Z - z_n)f(z_n)\right], \quad \ldots \quad (59)$$

lorsque la limite de chaque différence $z_k - z_{k-1}$ est $= 0$.

55. Or, il est établi dans les éléments du calcul intégral qu'on a

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

lorsque z représente une variable réelle, que $\frac{dF(z)}{dz}$ est $= f(z)$ et que $F(z)$ reste continue pour toutes les valeurs de z, depuis z_0 jusque et y compris Z. La démonstration de ce théorème demeure mot à mot applicable,

1°. si z est une variable complexe et que z_0 et Z représentent des points arbitraires du plan; que tous les accroissements infiniment petits de z, en d'autres termes toutes les différences $z_k - z_{k-1}$, aient les mêmes directions, ou, ce qui revient au même, que z parcoure de z_0 à Z une ligne droite; que $F(z)$ soit continue pour les points de cette ligne; enfin, que pour les points successifs de la ligne on prenne les valeurs de z qui correspondent à une même valeur initiale $z = z_0$;

2°. si z représente une direction complexe $\alpha \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, et que z_0 et Z soient par conséquent des directions arbitraires; que tous les accroissements infiniment petits de z, c'est-à-dire toutes les différences $z_k - z_{k-1}$, aient le même angle de position, et que par conséquent z parcoure un plan de z_0 à Z; que $F(z)$ soit continue pour toutes les directions parcourues dans ce plan; enfin, que pour les directions successives on prenne les valeurs qui correspondent à une même valeur initiale $z = z_0$.

56. En embrassant maintenant les *points de ramification* et les points dans lesquels la fonction devient *nulle* ou *discontinue*

sous le nom commun de *points critiques* (*Ausnahme-Puncte*), on arrive aux résultats suivants.

Si dans $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ on fait parcourir à z, de $z_0 = P_1$ à $Z = P_2$, deux chemins différents composés de lignes droites, $P_1 P_3 P_2$ et $P_1 P_4 P_5 P_2$ (fig. 11), pour lesquels les conditions posées ci-dessus soient satisfaites, et si l'on représente par $I(P_1 P_4)$ la valeur de l'intégrale de $f(z)dz$ lorsque z passe de P_1 à P_4 par la ligne droite $P_1 P_4$, la valeur de w est suivant l'un des deux chemins, $P_1 P_3 P_2$,

$$w_1 = I(P_1 P_2),$$

et suivant l'autre chemin, $P_1 P_4 P_5 P_2$,

$$w_2 = I(P_1 P_4) + I(P_4 P_5) + I(P_5 P_2).$$

Dans la supposition de $\int f(z)dz = F(z)$, on a, d'après ce qui a été dit plus haut:

$$\begin{aligned} I(P_1 P_2) &= F(P_2) - F(P_1), \\ I(P_1 P_4) &= F(P_4) - F(P_1), \\ I(P_4 P_5) &= F(P_5) - F(P_4), \\ I(P_5 P_2) &= F(P_2) - F(P_5), \end{aligned}$$

et par conséquent, puisque dans ces égalités P_4 et P_5 représentent toujours la même valeur,

$$w_1 = F(P_2) - F(P_1),$$

et

$$w_2 = F(P_2) - F(P_1).$$

Dans ces deux équations, P_1 représente la même valeur (initiale) z_0; si donc P_2 représente aussi dans toutes les deux la *même* valeur, on a

$$w_1 = w_2,$$

c'est-à-dire que l'intégrale est la même, prise suivant l'un ou suivant l'autre des deux chemins.

Comme ce raisonnement est indépendant du nombre des points intermédiaires P_4, P_5, ..., on a donc cette proposition:

Si z parcourt de z_0 à Z deux chemins différents, de telle sorte que sur ou entre ces chemins il ne se trouve aucun point critique,

et que par conséquent aussi, à la même valeur initiale z_0 *de* z, *corresponde la même valeur finale* Z *de* z, *la valeur de* $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ *est la même le long des deux chemins*[1]), ou, en d'autres termes:

La valeur de l'intégrale définie $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ *est indépendante du chemin parcouru par* z *de* z_0 *à* Z, *aussi longtemps que sur ou entre ces chemins il n'y a pas de points critiques.*

Si l'on remarque maintenant que de la définition de l'intégrale définie il résulte

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

on a aussi les deux propriétés suivantes:

Si z *parcourt une ou plusieurs fois une ligne fermée qui ne contient ni n'inclut aucun point critique, de manière qu'après les diverses révolutions le point de départ acquière de nouveau exactement la valeur qu'il avait à l'origine du mouvement, la valeur de* w, *c'est-à-dire, la valeur de l'intégrale définie prise le long de la ligne fermée, est égale à zéro;*

et

Si z, *partant d'un même point, parcourt dans le même sens deux ou plusieurs lignes fermées, semblablement situées par rapport aux points critiques de la fonction, la valeur de l'intégrale, prise le long des différentes lignes, est la même, en d'autres termes, la valeur de cette intégrale est indépendante de la forme de la ligne fermée que* z *parcourt une ou plusieurs fois.*

57. Supposons maintenant que z, partant de P_1, parcoure k

---

[1]) Une démonstration de ce théorème, fondée sur l'application du calcul des variations, a été donnée par M. Puiseux, *Untersuchungen über die Algebr. Functionen, dargestellt von* H. Fischer, Halle, 1861. Cette démonstration, de même que l'élégante démonstration de Riemann, qui se trouve dans presque tous les Traités sur les quantités complexes, s'appuie sur des considérations qui sont étrangères à la nature des quantités complexes.

fois en sens positif[1]) une ligne fermée $P_1 QRP_1$ (fig. 12), qui inclut un seul point critique $P = p_1$; décrivons autour de P un cercle PQ_1, et menons en outre la droite $P_1 Q_1$; d'après ce qui précède, l'intégrale suivant $P_1 QRP_1$ a alors la même valeur que l'intégrale prise dans le même sens le long de la ligne $P_1 Q_1 R_1 Q_1 P_1$, et par conséquent, si l'on désigne par $I_m(P_1 Q_1)$ l'intégrale suivant $P_1 Q_1$ prise entre les limites P_1 et Q_1 lors du $m^{\text{ième}}$ parcours, et par $I_l(p_1)$ l'intégrale suivant le cercle décrit autour de p_1 lors du $l^{\text{ième}}$ parcours, l'intégrale susdite w a pour valeur:

$$w = I_1(P_1 Q_1) + I_1(p_1) + I_1(Q_1 P_1) + I_2(P_1 Q_1) + I_2(p_1) + \\ + I_2(Q_1 P_1) + I_3(P_1 Q_1) + \ldots + I_k(P_1 Q_1) + I_k(p_1) + I_k(Q_1 P_1).$$

Mais on a $I_m(Q_1 P_1) + I_{m+1}(P_1 Q_1) = 0$, et par suite aussi:

$$w = I_1(P_1 Q_1) + \sum_1^k I_l(p_1) + I_k(Q_1 P_1) \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

En faisant décroître indéfiniment la longueur du rayon PQ_1, on a donc la propriété suivante:

Si, dans $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$, z, *partant de* z_0, *parcourt* k *fois une ligne fermée qui n'enferme qu'un seul point critique* p_1, *la valeur de cette intégrale est égale à celle qui est prise dans le même sens sur le cercle infiniment petit décrit de* p_1 *comme centre, augmentée de la somme des intégrales rectilignes* $I_1(P_1 Q_1)$ *et* $I_k(Q_1 P_1)$.

En désignant par r le rayon du cercle susdit, on a pour les points de ce cercle $z = p_1 + r \uparrow \varphi$, et par conséquent, puisque dans $\sum_1^k I_l(p_1)$ φ seul varie et croît de α à $\alpha + 2k\pi$, $dz = r\,d\varphi \uparrow \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = (z - p_1)\,d\varphi \uparrow \frac{\pi}{2}$ et, après substitution:

$$\sum_1^k I_l(p_1) = \int_\alpha^{\alpha + 2k\pi} (z - p_1) f(z)\,d\varphi \uparrow \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

---

[1]) C'est-à-dire que k indique la différence des nombres de révolutions positives et négatives accomplies par z autour de p_1, de sorte que k peut avoir chaque valeur entière (positive, nulle ou négative).

Lorsque r tend vers la valeur-limite zéro, il en est de même pour $z-p_1$. Dans le cas où, pour lim. $r=0$, lim. $(z-p_1)f(z)$ prend une valeur *finie* déterminée λ, qui ne dépende pas de φ et qui reste par conséquent toujours la même, quel que soit le côté par où z approche du point p_1, on a

$$\sum_1^k \mathrm{I}_i(p_1) = \int_\alpha^{\alpha+2k\pi} \lambda\, d\varphi \uparrow \frac{\pi}{2} = 2k\pi\lambda \uparrow \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

expression dans laquelle on a $\lambda =$ lim. $(z-p_1)f(z)$ pour lim. $r=0$.

Dans le cas où, pour lim. $r=0$, lim. $(z-p_1)f(z)$ ne prend *pas* une valeur finie déterminée, on représente encore la valeur de w_1 par $2k\pi\lambda \uparrow \frac{\pi}{2}$; la détermination de la valeur de λ devient alors plus compliquée; on peut consulter, à ce sujet, Houël, *Théorie élémentaire des quantités complexes*. Paris, Gauthier-Villars, 1868, n°s 141 et 288.

De ce qui précède, il est facile de déduire, par la méthode ordinaire, comment on détermine la valeur de l'intégrale lorsque la ligne fermée inclut un nombre fini n de points critiques isolés, c'est-à-dire, situés à des distances finies l'un de l'autre. Je renvoie à cet égard à mon Mémoire original.

§ 13.

Les intégrales des fonctions monodromes.

58. Jusqu'ici nous avons toujours parlé de *points critiques*, sans nous inquiéter de la nature de ces points. Lorsqu'on tient compte de cette nature, on doit distinguer en premier lieu le cas où les points sont des *points de ramification*, et où par conséquent $f(z)$ est une fonction polydrome de z, de celui où $f(z)$ est monodrome. Dans ce dernier cas, les considérations générales présentées ci-dessus se simplifient beaucoup. Si l'on remarque, en effet, que, lorsque $f(z)$ a une valeur finie, l'accroissement

$$\mathrm{F}(z+\Delta z) - \mathrm{F}(z) = [f(z)+\varepsilon]\,\Delta z$$

(pour la limite $\varepsilon = 0$) est infiniment petit en même temps que Δz; que, lorsque $f(z)$ est monodrome, Δz au passage d'un point au suivant n'a qu'une seule valeur, et que par conséquent l'accroissement de $F(z)$ n'a aussi qu'une valeur déterminée unique; et que, dans les fonctions *algébriques*, la présence ou l'absence de z sous le signe radical détermine la monodromie ou la polydromie de la fonction, on est conduit à la propriété suivante:

Quand une fonction $f(z)$ est monodrome et continue sur et entre deux lignes, l'intégrale indéfinie de $f(z)\,dz$ ne saurait être une fonction algébrique polydrome ou discontinue sur ou entre ces lignes [1].

Lors donc que $f(z)$ est monodrome, on a, au n°. 57,

$$I_1(P_1Q_1) + I_k(Q_1P_1) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

car si dans $w_1 = f(z)$, lors de la première révolution de z, la valeur w_0 de w_1 correspond à un point arbitraire de P_1Q_1, *après* la $k^{\text{ième}}$ révolution correspondra à ce même point de P_1Q_1 la valeur $w_0 \,.\, 1 \uparrow 2k\pi$ de w_1; de sorte que, d'après la définition d'intégrale définie, on a $I_k(Q_1P_1) = -I_1(P_1Q_1) \,.\, 1 \uparrow 2k\pi$, et par conséquent aussi $I_1(P_1Q_1) + I_k(Q_1P_1) = I_1(P_1Q_1) . [1 - 1 \uparrow 2k\pi] = 0$. Par là la form. (62) devient

$$w = \sum_1^k I_i(p_1). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

et le théorème du n° 57 se transforme en celui-ci:

Quand $f(z)$ est une fonction monodrome de z, et que, à partir de z_0, z parcourt k fois une ligne fermée qui n'inclut qu'un seul point critique, la valeur de l'intégrale $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$ est la même que celle qui est prise dans le même sens sur le cercle infiniment petit décrit de p_1 comme centre, c'est-à-dire que cette valeur est égale à $2k\pi\lambda \uparrow \frac{\pi}{2}$.

---

[1]) Il n'est pas permis de dire que l'intégrale indéfinie doit être monodrome et continue sur et entre ces lignes: elle peut aussi être infinitiforme, comme c'est le cas, par exemple, pour $\int \frac{dz}{z}$, $\int \frac{dz}{1+z^2}$, etc.

En outre, il n'y a alors plus à tenir compte des points pour lesquels $f(z)$ devient nulle, car si pour $z = p_1$ on a $f(z) = 0$, on a aussi, pour lim. $z - p_1 = 0$, $\lambda = \lim. (z - p_1) f(z) = 0$, de sorte que ces points n'ont aucune influence sur la valeur de w. Les seuls points à considérer sont donc ceux pour lesquels $f(z)$ devient discontinue.

59. Si maintenant, pour exprimer que la fonction monodrome $f(z)$ est continue pour tous les points situés *sur* ou *entre* les deux chemins (*sur* ou *dans* la ligne fermée) que z parcourt de z_0 à Z, on dit que $f(z)$ est *synectique* entre ces chemins (Cauchy, *Comptes rendus*, 1855, p. 447), il résulte de ce qui précède, que, lorsque $f(z)$ est synectique entre le chemin que z parcourt de z_0 à Z, et la ligne droite qui joint z_0 et Z, la valeur de l'intégrale $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$ est aussi sur la première de ces deux lignes égale à

$$F(Z) - F(z_0),$$

$F(z)$ représentant l'intégrale indéfinie de $f(z)\, dz$.

Dans ce cas, et par conséquent aussi *chaque fois* que $f(z)$ est synectique sur la surface entière, la valeur de l'intégrale définie se déduit donc de l'intégrale indéfinie exactement de la même manière que lorsqu'il s'agit d'une variable réelle.

Si, dans $w = \int_0^Z f(z)\, dz$, Z est un point P_1 de l'axe, et que $f(z)$ soit synectique pour tous les points du quadrant qui, sur le cercle décrit de O avec le rayon OP_1 (fig. 13), est compris entre l'axe et la perpendiculaire OP_2 élevée à l'axe en O, la valeur de l'intégrale est la même, soit que z parcoure la ligne droite OP_1, ou bien d'abord la droite OP_2 et ensuite l'arc de cercle P_2PP_1. Pour ce dernier, on a $z = Z \uparrow \varphi$, $dz = Z\, d\varphi \uparrow \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, φ passant de $\frac{\pi}{2}$ à 0; de sorte qu'on obtient:

$$w = \int_0^{Z \uparrow \frac{\pi}{2}} f(z).dz + Z \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(Z \uparrow \varphi).\, d\varphi \uparrow \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Par la substitution de $z = z_1 \uparrow \frac{\pi}{2}$ dans le premier terme du second membre, cette équation devient:

$$w = \int_0^Z f\left(z \uparrow \frac{\pi}{2}\right) . dz \uparrow \frac{\pi}{2} + Z \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(Z \uparrow \varphi) . d\varphi \uparrow \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) . \quad (67)$$

Soit, par exemple, $f(z) = z^{2a-1} (1 - z^{2b})^c$ et $Z = 1$; on a alors:

$$w = \int_0^1 z^{2a-1} (1 - z^{2b})^c dz = \frac{2^c b^c 1^{c/1}}{(2a)^{c+1/2b}} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

en outre, $dz = d\varphi \uparrow \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ et $1 - z^{2b} = 1 - 1 \uparrow 2b\varphi = 2 \, Sin \, b\varphi \uparrow \frac{3\pi + 2b\varphi}{2}$, de sorte qu'après substitution on obtient:

$$w = \int_0^1 z^{2a-1} (1 - z^{2b} \uparrow b\pi)^c dz \uparrow a\pi . + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2^c Sin^c b\varphi \; d\varphi \uparrow \left[(2a + bc)\varphi + \frac{3c+1}{2} \pi \right]$$

Si b et a sont pairs, le premier terme du second membre est égal au second membre de l'éq. (68), et par conséquent on a aussi:

$$w_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\varphi . d\varphi \uparrow \left[(2a + bc)\varphi + \frac{3c+1}{2} \pi \right] = 0 ;$$

si, au contraire, b est pair et a impair, on trouve:

$$w_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b \varphi \, d\varphi \uparrow \left[(2a + bc)\varphi + \frac{3c+1}{2} \pi \right] = -2 . \frac{b^c 1^{c 1}}{(2a)^{c+1/2b}} ;$$

etc.; d'où il suit, à raison de $r \uparrow \alpha = r \; Cos \, \alpha + \sqrt{-1} . r \; Sin \, \alpha$, pour a et b pairs,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\varphi . Cos \left[(2a + bc)\varphi + \frac{3c+1}{2} \pi \right] d\varphi = 0 . \; . \quad (69)$$

pour a impair et b pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\varphi \,.\, Cos\left[(2a+bc)\varphi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\varphi = -2 \,.\, \frac{b^c 1^{c/1}}{(2a)^{c+1/2b}} \quad (70)$$

et pour b pair et a quelconque, mais entier et > 0,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\varphi \,.\, Sin\left[(2a+bc)\varphi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\varphi = 0 \,.\,.\, \quad (71)$$

(Pour d'autres méthodes découlant de ces considérations et propres à déterminer des intégrales définies entre des limites réelles, voir mon Mémoire original, ainsi que Houël, *l. c.*, n° 225 et suiv.).

60. Soit encore $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, et joignons les points $P_1 = z_0$ et $P_2 = Z$ par une ligne droite $P_1 P_2$ (fig. 14) et par une ligne courbe $P_1 L P_2$, de telle sorte que le chemin fermé qui en résulte entoure les n points isolés p_l pour lesquels $f(z)$ est discontinue, et de façon que z, en parcourant ce chemin fermé, fasse l révolutions autour du point p_l; on a alors:

$$\int_{z_0} f(z)dz = 2\pi \sum_1^n l\,\lambda_l \uparrow \frac{\pi}{2}\,,$$

et par conséquent aussi, à cause de $w + I_k(P_2 P_1) = \int_{z_0} f(z)dz$,

$$w = 2\pi \sum_1^n l\,\lambda_l \uparrow \frac{\pi}{2} - I_k(P_2 P_1), \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (72)$$

expression où il faut prendre, dans $I_k(P_2 P_1)$, les directions réelles que z a obtenues après avoir tourné autour des points critiques. La valeur de w est alors dite la valeur *générale* de $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$.

§ 14.

Les intégrales des fonctions polydromes.

61. Lorsque $f(z)$ est une fonction polydrome de z, nous pouvons, en ce qui concerne les rapports de l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$ avec les points pour lesquels $f(z)$ devient nulle ou discontinue, sans que ces points soient des points de ramification de $f(z)$, renvoyer au § précédent, de sorte que provisoirement nous négligeons tout à fait ces points, ou plutôt nous considérons seulement les fonctions polydromes dans lesquelles les termes ne sont pas affectés de facteurs $z-p$ qui ne donnent pour $z=p$ aucun point de ramification.

Du § 12 découlent alors les propositions suivantes:

1°. *La valeur de* $w=\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$ *est indépendante du chemin que* z *parcourt de* z_0 *à* Z, *pourvu que ces chemins ne contiennent ni n'enferment aucun point de ramification.*

2°. *Lorsque* z, *partant de* z_0, *parcourt une ou plusieurs fois une ligne fermée, qui ne contient ni n'inclut aucun point de ramification, on a* $w=0$.

Nous avons vu, en outre, que si z, à partir de P_1, parcourt k fois en sens positif une ligne fermée qui inclut un point de ramification unique p_1, la valeur de l'intégrale définie $w=\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$ est égale à:

$$I_1(P_1 Q_1) + \sum_{1}^{k} I_l(p_1) + I_k(Q_1 P_1).$$

62. Soit, en premier lieu, $f(z)=\sqrt[n]{z-p_1}$ et par conséquent

$$w=\int_{z_0} \sqrt[n]{z-p_1}\, .\, dz; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

pour lim. $z-p_1=0$ on a alors $\lambda=0$, donc aussi $\sum_1^k I_l(p_1)=0$, et par suite

$$w=I_1(P_1Q_1)+I_k(Q_1P_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (74)$$

Si, dans $w_1=\sqrt[n]{z-p_1}$, à un point arbitraire de P_1Q_1, correspond, lors de la première révolution, la valeur w_0 de w_1, la valeur de w_1, qui correspondra à ce même point de P_1Q_1 après k révolutions, sera $w_0 \,.\, 1 \uparrow \frac{2k\pi}{n}$; en représentant donc par $I(P_1Q_1)$ l'intégrale suivant P_1Q_1, dans le cas où l'on ne prend que les valeurs de z qui correspondent à la valeur initiale de P_1, origine de la génération, on aura $I_k(Q_1P_1)=-I(P_1Q_1) \,.\, 1 \uparrow \frac{2k\pi}{n}$, et par substitution dans (74):

$$w=\left[1-1\uparrow\frac{2k\pi}{n}\right] . \, I(P_1Q_1), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

expression où k indique la différence des nombres de révolutions positives et négatives accomplies par z autour de p_1, de sorte que k peut avoir une valeur entière quelconque (positive, nulle ou négative).

D'une manière entièrement analogue on trouve pour la valeur de

$$w=\int_{z_0}\frac{dz}{\sqrt[n]{z-p_1}}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (76)$$

dans le cas où z fait k révolutions autour du point de ramification p_1 à partir de P_1, l'expression:

$$w=\left[1-1\uparrow-\frac{2k\pi}{n}\right] . \, I(P_1Q_1), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (77)$$

qui montre que k révolutions positives autour d'un point de ramification ayant rapport à un facteur du dénominateur sont équivalentes à k révolutions négatives autour d'un point de ramification ayant rapport à un facteur du numérateur.

63. Soit maintenant:

$$f(z)=\sqrt[n]{\frac{(z-p_1)(z-p_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(z-p_m)}{(z-p_r)(z-p_s)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(z-p_u)}},$$

et par conséquent:

$$w=\int_{z_0}\sqrt[n]{\frac{(z-p_1)(z-p_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(z-p_m)}{(z-p_r)(z-p_s)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(z-p_u)}} \,.\, dz; \; . \; . \; (78)$$

supposons, en outre, que z, à partir de P_1, parcoure une ligne fermée entourant k points de ramification, de telle sorte que z fasse, en sens positif, d'abord n_1 révolutions autour de p_1, puis n_r autour de p_r, ensuite n_2 autour de p_2, n_s autour de p_s, etc., enfin de nouveau n'_1 autour de p_1, etc.; pour chacun des u points de ramification on a alors, à la limite $z-p_l=0$, $\lambda_l=0$ et par conséquent aussi $\sum_1^k I_l(p_g)=0$, d'où il résulte:

$$w=I_1(P_1Q_1)+I_{n_1}(Q_1P_1)+I_{n_1}(P_1Q_r)+I_{n_1+n_r}(Q_rP_1)+$$
$$+\ldots\ldots+I_{n_1+n_r+\ldots+n_u}(P_1Q_1)+I_{n_1+n_r+\ldots+n'_1}(Q_1P_1)+\ldots$$

expression dans laquelle Q_g est un point du cercle infiniment petit décrit autour de p_g comme centre.

Mais on a (voir n° 62) $I_k(Q_1P_1)=-I_{k+1}(P_1Q_1)=-I(P_1Q_1).1\uparrow\frac{2k\pi}{n}$, de sorte qu'on obtient:

$$w=\Big[1-1\uparrow\frac{2n_1\pi}{n}+1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+n_2-n_s+\ldots\mp n_k)\pi}{n}-$$
$$-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots\mp n_k+n'_1)\pi}{n}+\ldots\Big].I(P_1Q_1)+$$
$$+\Big[1\uparrow\frac{2n_1\pi}{n}-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r)\pi}{n}+1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots+n'_1)\pi}{n}-$$
$$-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots+n'_1-n'_r)\pi}{n}+\ldots\Big].I(P_1Q_r)+$$
$$+\Big[1\uparrow\frac{2(n_1-n_r)\pi}{n}-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+n_2)\pi}{n}+1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots-n'_r)\pi}{n}-$$
$$-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots-n'_r+n'_2)\pi}{n}+\ldots\Big].I(P_1Q_2)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\Big[1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+..)\pi}{n}-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots\mp n_k)\pi}{n}+1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+..+n'_1-..)\pi}{n}-$$
$$-1\uparrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots+n'_1-\ldots\mp n'_k)\pi}{n}+\ldots\Big].I(P_1Q_{k_1}).\quad(79)$$

où l'on doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que le

point de ramification p_k se rapporte à un facteur du numérateur ou à un facteur du dénominateur.

64. Les mêmes considérations restent applicables lorsque deux ou plusieurs points de ramification coïncident. Soit, par exemple, $f(z) = \sqrt[3]{(p+qz)^2}$ et par suite

$$w = \int_{z_0} \sqrt[3]{(p+qz)^2} \, . dz ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

$-\frac{p}{q}$ est alors le seul point de ramification de la fonction; en faisant parcourir à z, à partir de $P_1 = z_0$, une ligne fermée qui fasse k circuits autour de ce point de ramification, la valeur de w est

$$w = \left(1 - 1 \uparrow \frac{4k\pi}{3}\right) . \mathrm{I}(P_1 Q_1),$$

et par conséquent, vu qu'on a $\mathrm{I}(P_1 Q_1) = \int_{z_0}^{-\frac{p}{q}+\delta} (p+qz)^{\frac{2}{3}} dz =$

$= \frac{3}{5q} (p+qz)^{\frac{5}{3}} \Big]_{z_0}^{-\frac{p}{q}+\varrho}$ pour lim. $\delta = 0$,

$$w = -\left(1 - 1 \uparrow \frac{4k\pi}{3}\right) \frac{3}{5q} (p+qz_0)^{\frac{5}{3}} ; \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

pour $k = 0, 3, 6, 9, \ldots 3m$, cette valeur devient:

$$w = 0;$$

pour $k = 1, 4, 7, \ldots 3m+1$, elle devient:

$$w = -\tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{-3}) \frac{3}{5q} (p + qz_0)^{\frac{5}{3}};$$

enfin pour $k = 2, 5, 8 \ldots 3m+2$, elle devient:

$$w = -\tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{-3}) \frac{3}{5q} (p + qz_0)^{\frac{5}{3}}.$$

65. Si l'on remarque maintenant que les intégrales de fonctions polynômes peuvent toujours être réduites à la somme d'intégrales de fonctions monômes, on voit que les indications précédentes suffisent *pour ramener aux intégrales rectilignes* $\mathrm{I}(P_1 Q_1)$, $\mathrm{I}(P_1 Q_r)$, *etc. la valeur de l'intégrale définie* $w = \int_{z_0} f(z)dz$, *dans laquelle* $f(z)$ *représente une fonction algébrique quelconque, et où* z, *à partir de* z_0, *parcourt une ou plusieurs fois une ligne fermée quelconque.*

Le seul point qui puisse offrir quelque difficulté est la détermination de λ pour lim. $z-p_l=0$, lorsque des facteurs $z-p_l$ se trouvent non-seulement sous le signe radical, mais aussi devant ce signe.

66. Pour déterminer enfin, dans le cas actuel, la valeur *générale* W de $W=\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, on joint les points $P_1=z_0$ et $P_2=Z$ par une ligne droite P_1P_2 (fig. 14) et par une ligne courbe P_1LP_2, de telle sorte que la ligne fermée qui en résulte entoure les n points de ramification p_l, et que z, en parcourant cette ligne, fasse l révolutions autour du point p_l.

On a alors: $$W+I_k(P_2P_1)=\int_{z_0} f(z)\,dz,$$

et par conséquent: $$W=\int_{z_0} f(z)\,dz-I_k(P_2P_1), \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

où l'on doit prendre pour P_2 et P_1, dans $I_k(P_2P_1)$, les directions réelles que z a obtenues en ces points après avoir tourné autour des points de ramification; ceux de ces points qui se trouvent sous le signe radical dans des facteurs de la forme $(z-p)^l$ doivent être portés en compte comme des points multiples de l'ordre l. La valeur de $\int_{z_0} f(z)\,dz$ a été, dans les nos précédents, déterminée d'une manière générale et ramenée à des intégrales rectilignes; de sorte que, entre autres, pour le cas où l'intégrale indéfinie $\int f(z)dz$ est connue, la valeur générale de $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ peut toujours être obtenue.

---

67. Toutes les considérations ici développées s'appliquent aussi au cas où $f(z)$ représente une fonction *transcendante* ou *bicomplexe*. Dans ce dernier cas, z est une direction complexe, et parcourt donc les directions indiquées par les génératrices successives d'un cône dont le sommet tombe en O. Les points critiques p_l du § 12 deviennent alors des *directions critiques* π_l, le cercle infiniment petit, décrit autour de p_l, devient un *cône circulaire* à angle du sommet infiniment petit, ayant pour axe la direction critique π_l.

SUR
L'ABSORPTION DE LA LUMIÈRE
D'APRÈS LA THÉORIE DE M. MAXWELL,

PAR

C. H. C. GRINWIS.

---

1. En 1865 [1]), M. Clerk Maxwell a émis pour la première fois l'hypothèse que la lumière est un phénomène électrique, consistant en ondes, qui se propagent dans le champ électromagnétique suivant des lois déterminées. Il est revenu sur cette question en 1868 [2]), et dans son *Treatise on Electricity and Magnetism*, publié en 1873, il a donné un aperçu plus développé de sa théorie, en y rattachant aussi l'action des aimants sur la lumière polarisée, découverte en 1845 par Faraday.

Je me propose d'examiner ici de plus près un seul point de cette théorie, à savoir, la propagation des vibrations électriques dans des corps qui, bien que susceptibles de polarisation électrique, possèdent en même temps le pouvoir de conduire l'électricité dynamique. Ce que M. Maxwell en dit est, quoique très important, relativement peu; une couple de pages seulement de son livre (paragr. 798—803) sont consacrées à ce sujet.

Pourtant, ce côté de la question présente un haut degré d'intérêt. M. Maxwell traite très brièvement du rapport qui existe entre la transparence et la conductibilité, et il remarque que la

---

[1]) *Phil. Trans.*, 1865.

[2]) „ „ 1868.

plupart des corps transparents sont de bons isolants, tandis que les bons conducteurs ne laissent pas passer la lumière. Quoique la loi, suivant laquelle l'opacité augmente à mesure que la conductibilité devient plus grande, soit sujette à de nombreuses exceptions, elle n'en fournit pas moins un sérieux appui à la théorie de Maxwell; dans les bons conducteurs, en effet, les vibrations électriques donneront lieu à des courants électriques, ce qui entraîne la transformation de l'énergie électrique en chaleur, de sorte que l'ondulation électrique ou lumineuse sera absorbée par le corps.

L'explication est moins claire en ce qui concerne les électrolytes; ceux-ci laissent passer le courant, et pourtant la plupart d'entre eux sont transparents. M. Maxwell indique succinctement comment il serait peut-être possible de lever cette difficulté; mais cette partie de la théorie exigerait une étude très délicate et approfondie, que nous n'aborderons pas pour le moment.

Nous voulons seulement soumettre au calcul l'absorption de la lumière par les corps conducteurs, et pousser ainsi un peu plus loin l'analyse de ce phénomène. Les calculs très peu nombreux que M. Maxwell a donnés sur ce point pourront nous servir de point de départ.

2. Supposons qu'une onde électrique plane se propage à l'intérieur d'un corps dans la direction de l'axe des x, et que les vibrations aient lieu dans le plan des yz, perpendiculairement à la ligne de propagation. Cette onde sera (hypothèse suffisamment générale pour notre objet) celle d'un faisceau de lumière polarisée rectilignement, qui se meut dans un corps dont le pouvoir d'induction électrique est K et la conductibilité C; désignons par V la vitesse de propagation de l'onde, par λ la longueur d'ondulation; introduisons, pour abréger, la grandeur $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, et soit enfin μ le pouvoir inducteur magnétique du milieu dans lequel s'exécute le mouvement vibratoire.

Pour obtenir les équations du mouvement, cherchons deux expressions pour l'intensité de courant w du mouvement électrique

parallèle à l'axe des z; remarquons d'abord que, vu la direction attribuée par nous à la propagation de l'onde plane, toutes les grandeurs, fonctions de x et de t, auxquelles nous aurons affaire, sont indépendantes de y et de z.

Les équations du paragr. 616 (nous conserverons les notations de M. Maxwell) donnent alors:

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dx}, \quad \text{où } \beta = \frac{1}{\mu} b = \frac{1}{\mu}\frac{dH}{dx},$$

par conséquent:

$$-4\pi\mu w = \frac{d^2 H}{dx^2}.$$

La seconde valeur de w est fournie par les éq. du par. 611, qui donnent

$$w = CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt},$$

ou, attendu qu'on a (598)

$$R = -\frac{dH}{dt},$$

$$-4\pi\mu w = 4\pi\mu C \frac{dH}{dt} + \mu K \frac{d^2 H}{dt^2};$$

l'équation du mouvement devient donc

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \mu K \frac{d^2 H}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt},$$

ou, en posant $\mu K = a^2$ et $2\pi\mu C = b^2$,

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = a^2 \frac{d^2 H}{dt^2} + 2b^2 \frac{dH}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

3. Tâchons de satisfaire à cette équation par une fonction périodique de la forme

$$H = A e^{-px} \, Cos \, k(x - Vt),$$

où A représente l'amplitude de la vibration à l'origine; en posant, pour abréger,

$$H' = A e^{-px} \, Sin \, k(x - Vt),$$

nous aurons:

$$\frac{dH}{dx} = -pH - kH',$$

$$\frac{d^2H}{dx^2} = p^2H + 2pkH' - k^2H,$$

$$\frac{dH}{dt} = kVH',$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k^2V^2H,$$

valeurs qui, substituées dans (1), donnent

$$p^2H + 2pkH' - k^2H = -a^2k^2V^2H + 2b^2kVH';$$

pour que cette équation subsiste en tout temps, il faut qu'on ait:

$$2pk = 2b^2kV \quad \text{et} \quad p^2 - k^2 = -a^2k^2V^2,$$

ou $$p = b^2V \qquad \text{et} \quad a^2k^2V^2 + bV^2 = k^2,$$

c'est-à-dire: $$V^2 = \frac{k^2}{a^2k^2 + b^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$= \frac{4\pi^2}{4\pi^2\mu K + 4\pi^2\mu^2C^2\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\mu K + \mu^2C^2\lambda^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

l'intégrale de l'équation (1) devient donc:

$$H = Ae^{-2\pi\mu CVx} \, Cos \, k(x - Vt), \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

où V est déterminée par l'équation (2) ou (2*a*).

L'expression (2*a*), que nous venons d'obtenir pour la vitesse, ne manque assurément pas d'intérêt; elle nous montre que dans un milieu, tel que nous l'avons supposé, la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde, des pouvoirs inducteurs électrique et magnétique, et de la conductibilité. Mais, quelle que soit l'importance de ce résultat, il aurait encore beaucoup plus de valeur pour nous si nous savions quelque chose de précis touchant

la liaison qui existe entre les grandeurs μ, K et C. — C'est là ce qui décidera si la théorie de M. Maxwell peut, oui ou non, expliquer par la formule ($2a$) la dispersion de la lumière. — Des recherches à ce sujet, sur plusieurs corps différents, auraient donc une importance capitale.

En ce qui concerne les valeurs limites de V, pour les corps isolants, c'est-à-dire, lorsqu'on a $C=0$, on obtient

$$V^2 = \frac{1}{\mu K}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2b)$$

M. Maxwell a trouvé que pour l'air $\sqrt{\frac{1}{\mu K}}$ concorde avec la vitesse de la lumière, et c'est là ce qui paraît lui avoir donné l'idée de l'analogie entre les vibrations lumineuses et les vibrations électriques.

Pour les corps sans polarisation électrique, on a $K=0$ et par conséquent

$$V^2 = \frac{1}{\mu^2 C^2 \lambda^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2c)$$

c'est-à-dire, que la vitesse est inversement proportionnelle à la longueur d'onde et à la conductibilité. — Ce dernier résultat, si singulier qu'il puisse paraître, est, comme le remarque M. Maxwell (par. 803), en parfait accord avec le fait connu, qu'un milieu d'un très grand pouvoir conducteur empêche complétement la propagation de la force magnétique.

4. Déterminons maintenant l'énergie que possède, avec cette forme de vibration, l'unité de volume de notre corps. Les formules générales de Maxwell (par. 638) donnent, attendu que, pour des vibrations dans la direction de l'axe des z, P, Q, F et G sont nuls, tandis que H n'est fonction que de x et de t,

$$a=0 \quad b=-\frac{dH}{dx} \quad c=0$$

$$\alpha=0 \quad \beta=-\frac{1}{\mu}\frac{dH}{dx} \quad \lambda=0,$$

de sorte que l'énergie électro-statique E (l'énergie potentielle du milieu) et l'énergie électro-magnétique T (l'énergie actuelle), prises

l'une et l'autre pour l'unité de volume, sont exprimées par les formules:

$$E = \frac{1}{2} R h \qquad T = \frac{1}{8 \pi \mu} b^2;$$

mais on a $h = \frac{K}{4\pi} R$ et $R = -\frac{dH}{dt}$, tandis que b a été donné ci-dessus; par conséquent:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{K}{8\pi} \left(\frac{dH}{dt}\right)^2 \\ T &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{dH}{dx}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Dans notre cas, où l'on a

$$H = A e^{-px} Cos\, k (x - Vt),$$

on tire, des valeurs que nous venons de trouver,

$$\frac{1}{V} \frac{dH}{dt} + \frac{dH}{dx} + pH = 0; \quad \dots \dots \dots (4)$$

pour les isolateurs, qui rendent $p = 0$ et $V^2 = \frac{1}{\mu K}$, l'éq. (4) donne immédiatement

$$K \left(\frac{dH}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dH}{dx}\right)^2,$$

c'est-à-dire, à raison des éq. (3),

$$E = T,$$

de sorte que, dans cette forme de vibration électrique, les deux énergies existent en quantité égale, comme on pouvait du reste le prévoir.

Mais cette égalité cesse dès que le corps conduit l'électricité et que par conséquent C n'est pas nul; nous avons alors, en vertu de (4):

$$\left(\frac{d\,\mathrm{H}}{d\,x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathrm{V}}\,\frac{d\,\mathrm{H}}{d\,t} + p\,\mathrm{H}\right)^2$$

$$= (\mu\,\mathrm{K} + \mu^2\,\mathrm{C}^2\,\lambda^2)\left(\frac{d\,\mathrm{H}}{d\,t}\right)^2 + \frac{2\,p}{\mathrm{V}}\,\mathrm{H}\,\frac{d\,\mathrm{H}}{d\,t} + p^2\,\mathrm{H}^2,$$

et par suite

$$\frac{1}{8\,\pi\,\mu}\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\,x}\right)^2 = \frac{\mathrm{K}}{8\,\pi}\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\,t}\right)^2 + \frac{1}{8\,\pi\,\mu}\left\{\frac{b^4}{k^2}\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\,t}\right)^2 + \frac{2p}{\mathrm{V}}\mathrm{H}\frac{d\mathrm{H}}{d\,t} + p\,\mathrm{H}^2\right\} \quad (5)$$

ou

$$\mathrm{T} = \mathrm{E} + \Delta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (6)$$

On verra bientôt que Δ est une grandeur positive, de sorte que T surpasse toujours E.

Pour le calcul de E, T et Δ dans notre cas, nous faisons observer que ces grandeurs sont des fonctions périodiques de t. Déterminons leurs valeurs moyennes pour la durée d'une vibration, et remarquons, à cet effet, qu'en posant $e^{-p\,x} = \mathrm{U}$ on a à la fois

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{H}^2\,d\,t = \frac{\mathrm{A}^2\,\mathrm{U}^2}{\tau}\int_0^\tau Cos^2\,k\,(x - \mathrm{V}\,t)\,d\,t = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{U}^2$$

et

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{H}'^2 d\,t = \frac{\mathrm{A}^2\,\mathrm{U}^2}{\tau}\int_0^\tau Sin^2\,k\,(x - \mathrm{V}\,t)\,d\,t = \frac{1}{2}\mathrm{A}^2\,\mathrm{U}^2\,,$$

tandis que

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{H}\mathrm{H}' d\,t = \frac{\mathrm{A}^2\,\mathrm{U}^2}{2\,\tau}\int_0^\tau Sin\,2\,k\,(x - \mathrm{V}\,t)\,d\,t = 0.$$

On trouve maintenant:

$$\frac{1}{8\,\pi\,\mu}\left(\frac{d\,\mathrm{H}}{d\,x}\right)^2 = \frac{1}{8\,\pi\,\mu}\left\{p^2\,\mathrm{H}^2 + 2\,p\,k\,\mathrm{H}\mathrm{H}' + k^2\,\mathrm{H}'^2\right\}$$

et par suite

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}^2}{16\,\pi\,\mu}\,(k^2 + p^2)\,\mathrm{U}^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (7)$$

On a, en outre,

$$\frac{K}{8\pi}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 = \frac{K}{8\pi} k^2 V^2 H'^2,$$

ce qui donne

$$E = \frac{A^2}{16\pi\mu} \mu K k^2 V^2 U^2;$$

mais, à cause de (2*a*), on a

$$\mu K . k^2 V^2 = k^2 - 4\pi^2 \mu^2 C^2 V^2 = k^2 - p^2,$$

donc

$$E = \frac{A^2}{16\pi\mu}(k^2 - p^2) U^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Pour Δ on obtient, tant par la différence de (7) et (8) que par le calcul direct d'après (5),

$$\Delta = \frac{A^2}{8\pi\mu} p^2 U^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

pour la somme W des deux énergies, on a encore:

$$W = \frac{A^2}{8\pi\mu} k^2 U^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

5. Mettons les résultats ainsi obtenus sous une forme modifiée, en posant

$$\frac{k^2}{8\pi\mu} = \frac{\pi}{2\mu\lambda^2} = \frac{1}{\sigma};$$

on trouve alors:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{A^2}{2\sigma}.\left\{1 + \frac{p^2}{k^2}\right\} U^2 \\ E &= \frac{A^2}{2\sigma}.\left\{1 - \frac{p^2}{k^2}\right\} U^2 \\ \Delta &= \frac{A^2}{\sigma}.\frac{p^2}{k^2} U^2 \\ W &= \frac{A^2}{\sigma}. U^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ces résultats nous apprennent que, dans les conducteurs, T est toujours plus grand que E; leur différence Δ doit alors être

probablement attribuée à l'apparition de courants dans le milieu matériel.

Les cas extrêmes donnent maintenant:

1°. Lorsque le corps est un isolateur parfait, et que par conséquent on a $C = 0$ et par suite aussi b et $p = 0$, en même temps que $U = 1$:

$$T = \frac{A^2}{2\sigma}$$

$$E = \frac{A^2}{2\sigma}$$

$$\Delta = 0, \quad W = E + T = \frac{A^2}{\sigma}.$$

2°. Lorsqu'il n'y a pas de polarisation électrique, on aura, en vertu de $(2c)$,

$$V = \frac{1}{\mu C \lambda},$$

par conséquent

$$p = b^2 V = 2\pi\mu C V = \frac{2\pi}{\lambda} = k,$$

et nous trouvons donc pour les conducteurs parfaits:

$$T = \frac{A^2}{\sigma} U^2,$$

$$E = 0,$$

$$W = \Delta = T = \frac{A^2}{\sigma} U^2.$$

Il suit de là que, si Δ doit être attribuée à des courants électriques, la lumière, entièrement transmise par les corps isolants, est entièrement absorbée par les conducteurs parfaits, chez lesquels la totalité de l'énergie se transforme en courants.

6. Passons maintenant au cas général, et désignons par L l'énergie de la lumière, c'est-à-dire, des vibrations électriques, et par S celle des courants électriques; on a alors

$$W = L + S,$$

et
$$L = 2E = \frac{A^2}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{p^2}{k^2} \right\} U^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$S = \Delta = \frac{A^2}{\sigma} \cdot \frac{p^2}{k^2} U^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

A cause du facteur

$$U^2 = e^{-2px} = e^{-2b^2 Vx} = e^{-4\pi\mu C Vx},$$

il y a une déperdition continue de chacune des deux énergies.

En appelant δ_1 la perte d'énergie qui est due à la polarisation (perte qui frappe L), et δ_2 celle qui est due aux courants (qui frappe S), la perte totale d'énergie est, pour l'unité de volume,

$$\delta = \delta_1 + \delta_2;$$

or, si nous faisons

$$1 - U^2 = U'^2,$$

la perte provenant de la polarisation est

$$\delta_1 = \frac{A^2}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{p^2}{k^2} \right\} U'^2,$$

la perte provenant des courants électriques

$$\delta_2 = \frac{A^2}{\sigma} \cdot \frac{p^2}{k^2} U'^2,$$

et on a en outre

$$U'^2 = 1 - U^2 = 1 - e^{-2px}$$
$$= 2px - 2p^2x^2 + \text{etc.};$$

on voit donc que pour les conducteurs δ_1 devient nulle, à cause de $p = k$, tandis que pour les non-conducteurs, à cause de $p = 0$, on a à la fois

$$\delta_1 = 0 \text{ et } \delta_2 = 0.$$

Pour les petites valeurs de x, δ_1 et δ_2 sont approximativement proportionnelles à x.

Il est probable que les valeurs de δ_1 et de δ_2, qui représentent toutes les deux une perte d'énergie électrique, proviennent d'un développement de chaleur; d'où il suivrait alors que la polarisation électrique, sauf dans le cas des isolateurs parfaits, est toujours accompagnée d'un pareil développement.

De nos formules on déduit encore que l'énergie lumineuse diminue pour des vibrations d'une plus grande longueur d'onde, tandis que l'énergie S, qui est complémentaire de la première, croît à mesure que λ devient plus grande.

La perte étant proportionnelle à l'énergie correspondante, il s'ensuit que ces mêmes lois conviennent aussi aux pertes respectives des deux énergies L et S.

Ce qui vient d'être dit s'applique surtout dans le cas où l'on a

$$\frac{p^2}{k^2} = \frac{b^4}{a^2 k^2 + b^4};$$

si b est petit, ce qui a lieu chez les mauvais conducteurs, $\frac{p^2}{k^2}$ augmente lorsque λ devient plus grande, mais sa valeur absolue reste très petite, de sorte que, chez les mauvais conducteurs, l'énergie lumineuse aussi bien que sa perte sont (au moins approximativement) indépendantes de la longueur d'onde.

Il en est de même, dans ce cas, de l'énergie relative aux courants.

Pour les corps dont la polarisation est faible, $\frac{p^2}{k^2}$ est à peu près égal à l'unité, et les énergies L et S sont encore indépendantes de la longueur d'onde ; dans ce cas, toutefois, L approche de zéro.

7. Cherchons enfin le rapport de la lumière transmise à la lumière incidente pour une plaque d'épaisseur l.

Comme l'amplitude à la distance l est $= \mathrm{A}\,\mathrm{U} = \mathrm{A}\,e^{-pl}$, les formules (11) et (12) donnent pour ce rapport :

$$r = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}+\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{W}} = \left\{1 - \frac{p^2}{k^2}\right\} \mathrm{U}^2,$$

c'est-à-dire,

$$r = \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) e^{-2pl}, \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

expression pour laquelle nous pouvons aussi écrire :

$$r = \frac{a^2 k^2}{a^2 k^2 + b^4} e^{-2pl} \quad \ldots\ldots \quad (14a)$$

Cette relation fait voir immédiatement que pour les isolateurs parfaits, chez qui l'on a $b=0$, le rapport en question est l'unité, tandis que pour les conducteurs parfaits, qui donnent $a=0$, toute la lumière est transmise, rien n'est absorbé.

En remplaçant dans notre dernière formule a, b, p et k par leurs valeurs, on obtient pour le rapport de la lumière transmise à la lumière incidente cette expression très remarquable

$$r=\frac{K}{K+\mu C^2\lambda^2}\cdot e^{-4\pi\mu C V l}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14b)$$

qui montre clairement comment l'absorption est déterminée par les grandeurs K, μ, C et λ.

Pour ce qui concerne l'influence de λ, nous voyons qu'elle n'existe pas chez les corps isolants, et que chez les autres les vibrations de plus grande longueur d'onde sont, toutes choses égales d'ailleurs, absorbées en plus forte proportion.

Toutefois, ce point ne pourra être entièrement éclairci que lorsque des recherches ultérieures auront établi une relation générale entre les constantes physiques figurant dans la formule (14*b*), ou du moins fait connaître les valeurs exactes de ces constantes.

UTRECHT, Mai 1876.

SUR

LA RÉDUCTION DE LA LÉVULOSE,

PAR

H. D. KRUSEMAN.

(*Extrait de la thèse inaugurale de l'auteur, Haarlem* 1876).

Le fait que de la mannite se produit dans la fermentation lactique et muqueuse du sucre, a suggéré à M. Linneman l'idée que, sous l'action de l'hydrogène à l'état naissant, le sucre s'empare de deux atomes H pour se transformer en mannite.

Pour vérifier cette présomption, il prit du sucre de canne interverti à la température ordinaire par l'acide sulfurique étendu. Après s'être débarrassé de l'acide, il porta de temps en temps dans la dissolution concentrée de petites quantités d'amalgame de sodium. „Dès que la liqueur est devenue faiblement alcaline", dit-il [1]), „le dégagement d'hydrogène cesse presque complétement, et si, avant d'introduire l'amalgame, on a déjà ajouté un peu de potasse à la dissolution, on n'observe même au commencement aucun dégagement de gaz. La liqueur, qui s'échauffe fortement, doit être refroidie à l'extérieur. Lorsque l'action s'est arrêtée, on sursature légèrement par l'acide sulfurique, on neutralise l'excès d'acide par le carbonate de chaux, et on sépare la majeure partie du sulfate en concentrant par l'évaporation, faisant cristalliser et ajoutant de l'alcool à l'eau-mère. Evaporée alors jusqu'à consistance sirupeuse, puis abandonnée pendant longtemps à elle-même, la liqueur

---

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, CXXIII, p. 136.

laisse déposer la mannite à l'état cristallin. On la purifie par l'expression et par une nouvelle cristallisation dans l'alcool bouillant."

Quel que fût l'intérêt du résultat obtenu par M. Linneman, il laissait pourtant indécise la question de savoir auquel des deux produits du dédoublement du sucre de canne (la glycose et la lévulose) était due la formation de la mannite.

De quelques observations antérieures de M. Berthelot, M. Linneman crut pouvoir inférer que c'était la lévulose qui était entrée en combinaison avec l'hydrogène. Il promit, il est vrai, de continuer les expériences qu'il avait entreprises sur d'autres espèces de sucre, mais les résultats de ces recherches ne nous sont pas connus jusqu'ici.

La première communication nouvelle sur la réduction des sucres fut faite par M. Dewar [1]). Lui aussi se posa cette question: est-ce la glycose ou la lévulose qui se transforme en mannite, ou bien subiraient-elles toutes les deux cette métamorphose? Il opéra d'abord sur du sucre interverti, et „ne trouva", dit-il, „dans ce qu'il observa, aucune raison pour attribuer à la glycose plutôt qu'à la lévulose la propriété de fixer de l'hydrogène." Il fit toutefois un pas de plus vers la solution du problème, en transformant aussi en mannite de la glycose, qui avait été extraite du miel.

Après lui, M. Bouchardat [2]) a repris et étendu les recherches concernant la réduction des matières sucrées, en opérant sur le sucre de lait et le sucre de canne, tant ordinaires qu'intervertis, et en outre sur la galactose cristallisée (produit du dédoublement du sucre de lait) et sur la glycose.

Dans les *Archives Néerlandaises* de 1872 (p. 202), M. F. W. Krecke a aussi fait connaître quelques résultats d'expériences relatives à l'action de divers agents réducteurs sur la glycose.

Il est à remarquer que ces divers chimistes ont expérimenté sur des mélanges de galactose et de glycose (obtenus en dédoublant le sucre de lait par les acides), ou sur des mélanges de

[1]) *Phil. Magazine*, 4, XXXIX, p. 345.

[2]) *Ann. Chim. Phys.* (4e série), t. XXVII, p. 68 et 145; Thèse: *De la Mannite et de ses éthers*, 1873.

glycose et de lévulose (sucre de canne interverti), ou encore sur la galactose et la glycose prises chacune isolément, mais jamais sur la lévulose seule; d'où il suit que la réponse n'a pas encore été donnée à la question soulevée par M. Dewar, à savoir, si, dans l'expérience primitive de M. Linneman, la mannite doit naissance à la glycose seule, ou aussi à la lévulose.

Je me suis proposé de rechercher si cette dernière espèce de sucre ne pourrait être réduite, tout aussi bien que la glycose et la galactose, à l'état d'alcool hexatomique; et, en cas d'affirmative, si le produit ainsi obtenu serait vraiment de la mannite, ou bien quelque autre corps, échappé à l'observation des chimistes qui antérieurement se sont occupés de la réduction du sucre interverti. Dans le cas où j'obtiendrais effectivement un corps de la formule $C^6 H^{14} O^6$, j'avais ou bien à fournir la preuve irrécusable de son identité avec la mannite, ou bien, si c'était un corps nouveau, à en déterminer les propriétés et, autant que possible, la constitution propre.

Ce travail me paraissait d'autant plus intéressant que M. Fittig affirme que la lévulose, — selon lui, indubitablement une aldéhyde, — „ne saurait être un dérivé de la mannite". D''après sa manière de voir [1]), on doit s'attendre à la formation d'un métamère de la dulcite et de la mannite, métamère inconnu jusqu'ici, mais pour lequel il a construit, en s'appuyant sur quelques assertions de MM. Hlasiwetz et Habermann [2]), une formule structurale, différente de celles par lesquelles il représente la dulcite et la mannite.

S'il existe une raison pour laquelle la réduction n'a pas été appliquée jusqu'ici à la lévulose, elle doit être cherchée sans doute dans la difficulté de se procurer et de purifier cette espèce de sucre. Le commerce ne la fournit pas, de sorte qu'on se voit obligé, quand on en a besoin pour des recherches, de

---

[1]) *Ueber die Constitution der sogenannten Kohlenhydrate*, von Rudolf Fittig, Tubingen, 1871.

[2]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, 1870, CLV, p. 201.

la préparer soi-même, soit en la retirant du sucre de canne interverti, soit en faisant bouillir l'inuline avec l'eau ou avec un acide étendu, pour transformer cette substance en lévulose.

Je renonçai bientôt à l'idée de préparer la lévulose au moyen du sucre de canne, attendu que les méthodes connues de Maumené et de Dubrunfaut ne me satisfaisaient guère, et qu'en outre il eût toujours été difficile de prouver l'absence de la glycose dans la lévulose obtenue. J'eus donc recours à l'inuline pure (extraite de la racine d'aunée), que je convertis en lévulose en la soumettant à l'action de l'eau chauffée sous pression.

La matière ainsi obtenue dans divers essais préliminaires m'ayant toujours donné, conformément à l'observation de M. Dragendorff, un pouvoir rotatoire spécifique plus ou moins différent de celui qu'a trouvé M. Dubrunfaut, j'ai fait quelques expériences comparatives, en distribuant une même solution dans 8 tubes de verre, soumettant ceux-ci pendant des temps variables à l'action de l'eau bouillante, décolorant ensuite à la même température et avec des quantités égales de charbon animal, etc. Les solutions ainsi obtenues, observées au polaristrobomètre de Wild, ont offert en moyenne les déviations suivantes:

Après	8	16	24	32	40	48	56	64 heures
moyenn.	—10°27′	—15°23′	—15°44′	—16°	—15°24′	—15°21′	—15°17′	—14°51′

Ces chiffres montrent que la rotation, après avoir atteint un maximum, ne reste pas constante, mais décroît de nouveau.

Comme, dans les principales expériences sur la réduction des diverses espèces de sucre, l'amalgame de sodium avait conduit au résultat désiré, je crus devoir donner la préférence à ce réactif. M. Krecke dit avoir obtenu des résultats beaucoup meilleurs en dégageant l'hydrogène au moyen d'une lame de magnésium, qui avait préalablement été recouverte d'une mince couche de platine, par immersion dans une solution étendue du chlorure de ce métal. J'ai essayé de différentes manières la réduction par le magnésium, en l'appliquant à la glycose, au sucre interverti, à la lactose et à la saccharose; mais cette méthode ne m'a pas satisfait.

500 grammes d'inuline d'aunée, mélangés avec 2,5 litres d'eau,

contenue dans des bouteilles à champagne bien bouchées, furent chauffés pendant environ 45 heures dans l'eau bouillante, et convertis de cette manière en lévulose. Pour chasser les matières volatiles, la liqueur sucrée parfaitement limpide fut évaporée au bain-marie, jusqu'à ce qu'il resta environ 1 litre de sirop brun.

Pareillement, 625 grammes de glycose cristallisée, obtenue d'une dissolution alcoolique, furent maintenus en fusion au bain-marie pendant 3 heures, puis le résidu, pesant 500 grammes, fut dissous dans une quantité égale d'eau et bouilli pendant une heure et demie, — l'eau évaporée étant restituée de temps en temps, — pour chasser les produits volatils.

Les deux matières saccharines, étendues d'eau jusqu'à occuper un volume de 2,5 litres, et rendues alcalines par l'addition de 100 c c d'une solution de soude ayant une densité de 1,14, furent introduites dans deux flacons, disposés de manière à ce que l'hydrogène ne pût s'échapper qu'en traversant un appareil à boules rempli d'eau.

Dans chacun de ces flacons on introduisit 2 kilogrammes d'amalgame de sodium, auxquels on ajouta encore, quelques heures plus tard, un troisième kilogramme. L'amalgame contenait environ 2,8 pour cent de Na; lors de la préparation, il avait été versé encore bien liquide sur une table couverte d'ardoise, de sorte qu'après le refroidissement il était sous forme de plaques minces, très faciles à manier.

Une élévation considérable de température (allant jusqu'à 60° C. suivant M. Bouchardat) ne fut pas observée. Déjà dans des expériences antérieures j'avais pu me dispenser ordinairement de tout refroidissement artificiel.

Le mercure liquide fut remplacé, le 3e et le 6e jour, dans chacun des deux flacons, par 3 kilogrammes de nouvel amalgame. Après 12 jours, les deux dissolutions ne donnaient plus lieu qu'à une très faible réduction de la liqueur de Fehling.

De chacune de ces dissolutions, préalablement neutralisées par l'acide sulfurique étendu et diluées jusqu'à occuper un volume

de 5 litres, on sépara par la distillation un litre de liquide. Ces produits de distillation furent ensuite traités suivant la méthode de Bouchardat, c'est-à-dire qu'on les soumit deux fois à une nouvelle distillation, en faisant passer chaque fois $\frac{1}{3}$ du liquide. Des 15 c c ainsi recueillis, on sépara au moyen d'un excès de carbonate de potasse les produits volatils dissous. En distillant ceux-ci sur la baryte anhydre, j'obtins des mélanges d'alcools, dont les quantités ($1\frac{1}{2}$ à 2 c c seulement) étaient trop faibles [1]) pour donner des résultats décisifs par la distillation fractionnée.

Les dissolutions saccharines, restées dans les cornues, furent débarrassées du sulfate de soude par l'évaporation et la cristallisation, ainsi que par l'addition d'alcool. Les deux résidus sirupeux, abandonnés à eux-mêmes pendant trois semaines, laissèrent déposer des masses cristallines, que je purifiai en les faisant cristalliser de nouveau dans l'eau et dans l'alcool. (Le produit, tant pour la lévulose que pour la glycose, s'élevait à environ 40 grammes).

Les deux produits se ressemblaient par leurs propriétés. D'une solution aqueuse concentrée j'obtins des cristaux sous forme de petits prismes réunis en agrégats sphéroïdaux; une solution alcoolique chaude (alcool à 95 °/₀) donna des aiguilles minces. Les deux produits étaient incolores, inodores, d'une saveur sucrée. Point de fusion de tous les deux 164° (non corrigé), le même que celui de la mannite. Ils ne réduisaient pas la liqueur de Fehling, et ne se coloraient pas en brun quand on les faisait bouillir avec une solution de potasse. Aucun pouvoir rotatoire ne put être décelé en opérant sur une solution concentrée et avec une longueur de tube de 3 décimètres. L'analyse élémentaire fournit les résultats suivants:

pour G (produit de la glycose), avec $0{,}380^5$ gr.: $0{,}551^5$ CO^2 et $0{,}272$ H^2O
» L (» » » lévulose) » $0{,}383^5$ » : $0{,}554^5$ CO^2 » $0{,}273$ H^2O

G. trouvé.	°/₀	calculé.	°/₀	L. trouvé.
39,5	C	39,6	C	39,4
7,9	H	7,7	H	7,9

[1]) Par suite de la basse température à laquelle la réduction avait eu lieu. (Bouchardat).

La détermination de la solubilité, à 14°, me donna:

	en 100 p. d'eau.	en 100 p. d'alcool (densité 0,905).
Mannite de la manne . .	12,8	1,56
Produit de la glycose . .	13,1	1,65
Produit de la lévulose . .	13,0	1,54

Les résultats obtenus semblent établir l'identité des deux produits de réduction. Toutefois, comme on paraît avoir reconnu depuis peu que la mannite n'est pas complétement inactive à l'égard de la lumière polarisée [1]), la possibilité existait encore que j'eusse obtenu deux corps à pouvoirs rotatoires opposés. Le sucre interverti pourrait alors avoir donné naissance, suivant Bouchardat, à de la mannite inactive, et nous aurions donc ici une relation semblable à celle que présentent les acides tartrique, antitartrique et racémique. Dans ce cas, la différence devait probablement s'accuser mieux chez les éthers nitriques, par une différence plus grande dans l'intensité ou par l'opposition du sens de la rotation. C'est pourquoi j'ai préparé, suivant la méthode de Strecker [2]), les éthers nitriques tant de la mannite extraite de la manne, que de celles que j'avais dérivées de la glycose et de la lévulose.

Les produits que j'obtins consistaient tous les trois en aiguilles soyeuses, incolores et inodores, d'une saveur légèrement amère. Ils faisaient explosion lorsqu'on les chauffait brusquement, ainsi que par la percussion.

Chauffés lentement, ils fondent vers 108° C. Ils sont insolubles dans l'eau, solubles dans le chloroforme et dans l'alcool absolu, mieux encore dans l'éther, et très solubles dans l'acide acétique cristallisable.

Une détermination numérique de la solubilité dans l'alcool absolu (densité 0,790), m'a donné, en 100 parties du dissolvant:

Nitromannite de la manne	2,51
» » » glycose	2,47
» » » lévulose	2,52.

---

[1]) *Ber. d. D. Chem. Ges.*, 1875, p. 133. — *Ann. Chim. Phys.*, 1875, p. 100.

[2]) *Jahresber.* von J. Liebig, 1849, p. 468. — Gmelin, VII, p. 807.

Pour déterminer le pouvoir rotatoire, j'essayai, mais en vain, de dissoudre par l'agitation un demi-gramme de matière dans 20 c c d'acide acétique à 75 %; l'alcool absolu n'en dissolvant pas non plus, d'après les expériences précédentes, plus de 2,5 %, j'eus recours à l'acide acétique cristallisable. Avec ce dissolvant, je trouvai à l'aide du polaristrobomètre ($l = 302,8$ mm., $p = 1,500$ gr. et $v = 20$ c c), pour la lumière du sodium:

Nitromannite dérivée de la:	1.	2.	3.	4.	moyenne.
lévulose	+ 9,05	+ 9,11	+ 9,17	+ 9,15	+ 9,12
glycose	+ 9,05	+ 9,19	+ 9,15	+ 9,10	+ 9,12
manne	+ 9,03	+ 9,06	+ 9,18	+ 9,17	+ 9,11

d'où l'on déduit par le calcul: $(\alpha)_D = + 40° 30'$ ($40° 26'$).

M. Bouchardat, pour $p = 10$ gr., $v = 100$ c c et $l = 200$ mm., a trouvé: $\alpha_j = + 8° 26'$, ce qui donne $(\alpha)_j = + 42° 2'$.

On voit donc que les éthers nitriques des alcools hexatomiques dérivables par réduction de la glycose et de la lévulose se ressemblent non-seulement par toutes leurs autres propriétés, mais aussi par la grandeur et le sens de leur pouvoir rotatoire spécifique.

J'ai aussi préparé, par la méthode de M. Otto Hecht [1]), les iodures hexyliques des trois espèces de mannite.

J'employai pour cela:

	Mannite de la		Iode.	Phosphore rouge.	Phosphore blanc.	Eau.
N°. 1	Manne	50 gr.	95,7	20	20	86
N°. 2	Glycose	35 gr.	66,5	14	14	60
N°. 3	Lévulose	30 gr.	57,0	12	12	51

L'iode étant introduit dans une cornue tubulée, on y versa d'abord l'eau, puis on ajouta peu à peu de petits fragments de phosphore ordinaire, en ayant soin de ne pas en introduire une nouvelle portion avant que la précédente ne fût convertie, avec l'iode et l'eau, en acides phosphoreux et iodhydrique.

---

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, CLXV, p. 146.

La réaction, qui au commencement marcha avec rapidité, dut plus tard être soutenue en secouant le mélange et en le chauffant au bain-marie. Après qu'on eut ajouté assez de phosphore, — la quantité totale de celui-ci doit être 8 à 9 fois celle qui, d'après le calcul, correspondrait à l'iode employé, — pour que le contenu de la cornue fût décoloré, on introduisit la moitié du phosphore rouge. La cornue, dont le col était étiré en une pointe médiocrement effilée, fut alors unie à un réfrigérant, et dans la tubulure on fixa un tube de verre en Y, dont une des branches pouvait être fermée au moyen d'un bouchon, tandis que l'autre était mise en communication avec le flacon laveur d'un appareil à dégagement d'acide carbonique. Lorsque tout l'air de la cornue eut été remplacé par l'acide carbonique, la cornue fut chauffée doucement au bain de sable, puis on y fit tomber, par le tube en Y, alternativement de petites quantités de mannite et des fragments de phosphore blanc. Le seconde partie du phosphore rouge fut ajoutée lorsque environ la moitié de la mannite fut décomposée. On doit veiller à ce que le courant d'acide carbonique passe sans interruption, et à ce qu'il y ait toujours un excès de phosphore dans la cornue, pour empêcher que de l'iode ne soit mis en liberté.

L'iodure produit nageait, sous la forme d'une huile légèrement colorée en jaune et souillée par du phosphore, à la surface de l'acide iodhydrique qui passait avec lui à la distillation; ce dernier était de temps en temps reversé dans la cornue.

Le produit brut ainsi obtenu fut isolé à l'aide d'un entonnoir à robinet, et débarrassé par le filtre du phosphore non dissous. Pour transformer en acide phosphoreux le phosphore dissous, on ajouta d'abord un peu d'eau, et ensuite assez d'iode pour que la couleur brune ne disparût qu'au bout d'un temps assez long. L'iodure fut alors lavé avec une solution faible de carbonate de potasse et avec de l'eau, puis soumis à une nouvelle distillation par l'introduction de vapeur d'eau, et enfin isolé de nouveau par l'entonnoir à robinet.

Le poids du produit ainsi purifié s'élevait,

pour l'iodure fourni par 50 gr. de mannite de la manne, à . . 45 gr.
» » » » 35 » » » » » glycose » 25 »
» » » » 30 » » » » » lévulose » 20 »

Ces produits furent séchés au moyen du chlorure de calcium et d'une perle de carbonate de potasse.

Dans mes tentatives pour soumettre à la distillation fractionnée le β-iodure hexylique provenant de la mannite de la manne, et pour en déterminer le point d'ébullition, j'eus, par suite de la facilité avec laquelle ce corps se décompose, à lutter avec les mêmes difficultés qu'avaient déjà rencontrées tant MM. Erlenmeyer et Wanklyn, que postérieurement M. Hecht. Pour éviter la décomposition due à l'action d'une température trop élevée, je distillai alors sous pression réduite, de manière à obtenir:

de l'iodure de la manne, à 24—20 mm., entre $67\frac{1}{2}$—$68\frac{1}{2}$ C. . . . les $\frac{4}{5}$
» » » » glycose » 20 » » 68—70 » . . . » $\frac{3}{5}$
» » » » lévulose » 15 » » 67—71 » . . . » $\frac{3}{5}$

Après, comme avant la distillation, les iodures présentaient une légère coloration, analogue à celle du vin de madère, mais qu'il était facile de leur enlever au moyen d'une solution étendue de potasse.

Soumis à la réaction indiquée par M. Victor Meyer [1]) pour distinguer les radicaux alcooliques primaires, secondaires et tertiaires, les trois iodures parurent donner naissance à un pseudonitrol, bien que la couleur bleue, observée en opérant sur 0,5 gr. d'iodure, fût très faible en comparaison de celle que produit l'iodure d'isopropyle.

Le point d'ébullition (non corrigé) était placé:

pour l'iodure de la manne, entre. . . . 167° et 168°
» » » » glycose, » . . . . 168° et 169°
» » » » lévulose, » . . . . 167° et 168°

Pour le poids spécifique, calculé par rapport à l'eau à 0° C, je trouvai:

	à 0° C.	à 50° C.	Coefficient de dilatation.
pour l'iod. de la manne . .	1,4589	1,3938	0,046
» » » » glycose . .	1,4477	1,3808	0,048
» » » » lévulose. .	1,4487	1,3839	0,046
Wanklyn et Erlenmeyer. . .	1,4447	1,3812	0,046

[1]) *Ber. d. D. Chem. Ges.*, VII, p. 1510.

Je déterminai aussi, à l'aide du goniomètre de Babinet, l'indice de réfraction pour la raie D; à 21° C., avec un angle réfringent de 66° 20′, j'obtins:

	Minimum de déviation.	Indice de réfraction.
pour l'iodure de la manne	43°15′	1,4935
» » » » glycose	43°18′	1,4940
» » » » lévulose. . . .	43°21′	1,4944

Les résultats que je viens de faire connaître prouvent suffisamment, ce me semble, que la réduction de la lévulose et celle de la glycose donnent lieu au même alcool hexatomique, la mannite.

La question de M. Dewar, „si la mannite obtenue par M. Linneman, dans la réduction du sucre interverti, a pu provenir de la lévulose tout aussi bien que de la glycose", cette question doit donc recevoir une réponse affirmative.

Il suit en outre de mes recherches, que la formule structurale proposée pour la lévulose par M. Fittig ne saurait être acceptée.

Le groupement à admettre entre les atomes de la molécule de cette espèce saccharine ne pourra être fixé d'une manière satisfaisante que lorsqu'on connaîtra avec plus d'exactitude les dédoublements que cette molécule éprouve sous l'influence de divers réactifs. Les seules données, dont nous pourrions en ce moment faire usage pour établir sa constitution, sont celles qui résultent des expériences comparatives de MM. Hlasiwetz et Habermann [1]). J'ai répété sur une petite échelle, avec la glycose et avec la lévulose préparée au moyen de l'inuline, le traitement par le chlore et l'oxyde d'argent, tel qu'il a été indiqué par ces deux chimistes. En somme, mes résultats ont été conformes aux leurs. Je n'ai toutefois pas réussi à faire cristalliser le sel barytique provenant de la glycose.

0,541 gr. de ce glycolate, séché entre 100 et 120°, m'ont fourni 0,244 gr. de sulfate de baryte, c'est-à-dire, 26,4 °/₀ de baryum. M. Hlasiwetz a trouvé 26,1 °/₀, M. Fudakowski [2]) 25,77 °/₀ ou, calculé, 26 °/₀.

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, 1870. CLV. p. 201.

[2]) *Ber. d. D. Chem. Ges.*, 1876, p. 42.

Avec la lévulose, j'ai obtenu du glycolate de chaux en grains sphériques incolores, qui, brisés et examinés au microscope, se montraient formés d'un amas serré de petites aiguilles capillaires.

0,5925 gr. de ce sel perdirent, entre 100 et 110° C, 0,131 gr. d'eau de cristallisation.

0,461 gr. (séchés entre 100 et 110°) donnèrent 0,326 gr. de sulfate de chaux.

	Calculé en 100 p. $(C^2 H^3 O^3)^2$ Ca.	Trouvé par moi.	Trouvé par Hlasiwetz.
Ca	21,05	20,9	20,9
H^2 O	27,5	28,4	28,8

Je crois que c'est aller trop loin que d'admettre, en se fondant sur les observations communiquées par MM. Hlasiwetz et Habermann, que la molécule de lévulose fournit *trois* molécules d'acide glycolique. Il me paraît plus probable que, dans le traitement par le chlore et l'oxyde d'argent, une partie de la molécule lévulose s'en détache à l'état d'acide glycolique, et que, la glycose étant reconnue pour l'aldéhyde primaire de la mannite, la lévulose doit être regardée comme une aldéhyde secondaire de cet alcool hexatomique.

Des expériences d'oxydation, portant comparativement sur la glycose et sur la lévulose, se font à présent dans le laboratoire de Mr le professeur Franchimont a Leide.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR

LE NOMBRE RELATIF DES CHOCS

QUE SUBIT UNE MOLÉCULE, SUIVANT QU'ELLE SE MEUT AU MILIEU DE MOLÉCULES EN MOUVEMENT OU AU MILIEU DE MOLÉCULES SUPPOSÉES EN REPOS,

ET SUR

L'INFLUENCE QUE LES DIMENSIONS DES MOLÉCULES,

DANS LA DIRECTION DU MOUVEMENT RELATIF, EXERCENT SUR LE NOMBRE DE CES CHOCS;

PAR

J. D. VAN DER WAALS.

On est conduit à chercher le rapport ci-dessus spécifié, à raison des difficultés que présente la solution directe du problème concernant le nombre des chocs subis par une molécule qui se meut entre des molécules en mouvement. Dans la supposition que les autres molécules soient en repos, le nombre des chocs est facile à trouver. Une fois ce premier nombre connu, il ne reste plus qu'à résoudre la question que nous nous sommes proposée, pour avoir le nombre des chocs qu'une molécule subit réellement en une seconde de temps.

Cette question a déjà été traitée par M. Maxwell et par M. Clausius, mais en négligeant la dimension des molécules dans la direction du mouvement relatif, et, même avec cette restriction, ils sont arrivés à des résultats différents. M. Clausius trouve que dans ce

cas le rapport cherché est $\frac{4}{3}$, — M. Maxwell, au contraire, le trouve $= \sqrt{2}$.

Il y a donc lieu d'examiner laquelle de ces deux valeurs doit être regardée comme la vraie. Des calculs que je vais exposer ressortira la confirmation du résultat $\sqrt{2}$ obtenu par M. Maxwell. Bien que j'aie suivi en majeure partie la voie tracée par ce savant, j'ai pourtant cru devoir m'en écarter à certains égards, d'abord parce que je voulais m'assurer si, en poussant le calcul au-delà du point où Clausius s'était arrêté lorsqu'il fixa à $\frac{4}{3}$ la valeur du rapport cherché, on pourrait trouver le résultat de Maxwell, et, en second lieu, parce que le calcul de l'influence exercée par la dimension des molécules suivant la direction du mouvement relatif rendait nécessaire l'adoption d'une marche un peu différente.

1. Dans un volume donné de molécules, désignons, avec M. Maxwell [1]), par $f(x)\,dx$ la portion qui possède une vitesse telle, que la composante suivant l'axe des X ait une valeur comprise entre x et $x + dx$; on doit alors avoir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Pour déterminer la forme de $f(x)$, on peut procéder de la manière suivante:

En représentant par n le nombre total des molécules contenues dans le volume en question, le nombre de celles dont les composantes de la vitesse sont comprises à la fois entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$, sera exprimé par:

$$n\, f(x)\, f(y)\, f(z)\, dx\ dy\ dz \;{}^{2})$$

Si ces molécules quittaient l'origine toutes au même instant, elles seraient contenues au bout d'une seconde, c'est-à-dire encore

---

[1]) *Phil. Mag.*, XIX, p. 19 (1860).

[2]) Pour obvier aux objections qu'on pourrait faire à cette supposition, M. Maxwell et plus tard M. Boltzmann ont donné une démonstration différente de celle que je suis ici.

au même instant, dans un élément d'espace $dx\ dy\ dz$, situé autour d'un point P, dont les coordonnées sont x, y et z.

Si ce point se trouvait sur l'axe des X, à une distance r de l'origine, le facteur de $dx\ dy\ dz$ serait égal à

$$n\, f(r)\, f(0)^2.$$

Si ce point se trouve quelque part ailleurs dans l'espace, mais à une distance égale de l'origine, le facteur en question doit aussi conserver une valeur égale, puisque la loi des vitesses est la même dans toutes les directions; on doit donc avoir:

$$f(x)\ f(y)\ f(z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) . f(0)^2$$

et par conséquent aussi:

$$f(x)^3 = f(0)^2\ f(x\sqrt{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}).$$

Dans la supposition que le point P se trouve sur le plan XY, on a:

$$f(x)\ f(y)\ f(0) = f(0)^2\ f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

ou

$$f(x)^2 = f(0)\ f(x\sqrt{2}) \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}).$$

Cherchons maintenant, en premier lieu, quelle fonction satisfait au caractère (I). Soit *log. nép.* $[f(x)] = \varphi(x)$, on tire alors de l'éq. (I):

$$3\varphi(x) = 2\varphi(0) + \varphi(x\sqrt{3})$$
$$3\varphi'(x) = \sqrt{3}\,\varphi'(x\sqrt{3})$$
$$\varphi''(x) = \varphi''(x\sqrt{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si l'on se figure deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, qu'on prenne sur un de ces axes des abscisses égales à *log. nép.* x, et qu'on combine avec ces abscisses des ordonnées égales à $\varphi''(x)$, l'équation (1) exprime que la ligne ainsi construite représente une fonction périodique, dont la période est $\frac{1}{2}$ *log. nép.* 3.

En cherchant de la même manière quelle fonction satisfait au caractère (II), on obtient

$$\varphi''(x) = \varphi''(x\sqrt{2}) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

de sorte que la ligne imaginée ci-dessus, outre la période $\frac{1}{2}$ *log. nép.* 3, devrait encore avoir une période $\frac{1}{2}$ *log. nép.* 2. Ces deux conditions sont contradictoires, à moins que la ligne ne soit une ligne droite parallèle à l'axe; en d'autres termes, $\varphi''(x)$ doit être constante.

On trouve maintenant sans peine qu'on doit avoir:

$$f(x) = C e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

où x^2 est précédé du signe moins, parce que la fonction devra être décroissante. La signification de α, qui a dû être introduit pour rendre la fonction homogène, sera reconnue plus loin. La valeur de C se déduit de la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \text{ qui donne } C = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}.$$

2. Cette forme étant connue, on trouve facilement aussi la loi des vitesses, au moyen du même nombre des molécules contenues dans l'espace qui entoure le point P.

La quantité $n f(x)\, f(y)\, f(z)\, dx\, dy\, dz$ est en effet égale à $\frac{n}{\alpha^3 \pi \sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} r^2\, dr \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$, lorsqu'on exprime l'élément de l'espace en coordonnées polaires ordinaires, — φ étant l'angle compris entre l'axe des Z et le rayon vecteur vers P, et θ l'angle compris entre l'axe des X et la projection de ce rayon vecteur sur le plan XY. Dans cette forme on voit le nombre des molécules qui, ayant quitté l'origine en même temps, ont suivi la direction (φ, θ) et sont arrivées au bout de 1 seconde à une distance de l'origine comprise entre r et $r + dr$. En intégrant par rapport à θ, entre 0 et 2π, nous trouvons $\frac{2n}{\alpha^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} r^2\, dr \sin\varphi\, d\varphi$ pour le nombre de celles qui, faisant un angle φ avec l'axe des Z, sont arrivées à une distance comprise entre r et $r + dr$; et en intégrant par rapport à φ, entre

les limites 0 et π, nous obtenons $\frac{4n}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} r^2\, dr$ pour le nombre de celles dont la vitesse est comprise entre r et $r + dr$. D'après ce mode de déduction, on voit qu'il n'est question que de vitesses positives, de sorte qu'on doit avoir

$$\int_0^\infty \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} r^2\, dr = 1.$$

3. Comme $r^2 e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}$ prend une valeur maximum pour $r = \alpha$, la signification de α est trouvée: α représente la vitesse qui est la plus ordinaire. Pour $r = 0$ et $r = \infty$, on a $\frac{r^2}{1} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} = 0$, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

Si nous cherchons la vitesse moyenne, nous trouvons, à l'aide de $\frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{r^2}{\alpha^2} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \frac{dr}{\alpha} \cdot \frac{r}{\alpha}$, que sa valeur est égale à $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$.

Pour la valeur moyenne du carré de la vitesse, $\frac{4\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{r^4}{\alpha^4} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \frac{dr}{\alpha}$ donne $\frac{3}{2}\alpha^2$. Pour la somme des forces vives, on a donc $\frac{3}{4}\alpha^2 \Sigma m$. Si nous écrivons $\frac{3}{4}\alpha^2 \Sigma m = \frac{1}{2} V^2 \Sigma m$, en désignant par V, à l'exemple de M. Clausius, la vitesse qui, si elle était commune à toutes les molécules, fournirait la même force vive que les vitesses réelles, on a $\alpha = V\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Pour l'oxygène, par exemple, auquel Clausius attribue la valeur $V = 461$ mètres, nous trouvons la valeur de la vitesse la plus ordinaire égale à 376 mètres, la vitesse moyenne $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$ égale à 425 mètres.

4. Nous passons maintenant à la recherche du nombre des chocs que les molécules subissent en moyenne par seconde, et,

négligeant d'abord l'étendue de la molécule dans la direction du mouvement, nous considérerons les 3 cas suivants:

a. celui où une molécule se meut parmi des molécules qui ne se meuvent pas; *b* celui où une molécule est seule en repos au milieu de molécules qui se meuvent; *c* celui où une molécule se meut au milieu de molécules en mouvement.

a. Dans ce cas, nous obtiendrons le résultat avec le plus de facilité en nous représentant la molécule mobile, à laquelle nous attribuons la forme sphérique, comme une figure mathématique, qui par suite n'est pas troublée dans son mouvement par les molécules placées sur son passage. Si nous décrivons un cylindre ayant pour axe la ligne que suit le centre de la molécule, et pour base un cercle d'un rayon égal au diamètre de la molécule, toutes les molécules qui se trouvent dans ce cylindre seront rencontrées par la molécule mobile. En une seconde il y aura donc $n \pi s^2 v$ rencontres, n représentant le nombre des molécules dans l'unité de volume, et v la vitesse de la molécule en mouvement. Comme instant de la rencontre, nous comptons alors celui où le centre de la molécule mobile est la projection de chacune des molécules fixes existant dans le cylindre. Cela revient à se représenter les molécules comme des disques perpendiculaires à la direction du mouvement. Comme la molécule mobile pourrait avoir toutes les vitesses possibles, nous devons introduire la vitesse moyenne, et nous trouvons ainsi, dans le cas (*a*):

$$N = n \pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} .$$

b. Lorsque la molécule considérée est elle-même regardée comme en repos, nous pouvons décrire, autour d'une sphère à rayon double de celui de la molécule, des cylindres tangents, dont les axes indiqueront toutes les directions possibles. Evaluons alors, en premier lieu, le nombre des chocs imputables aux molécules dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$. Ce nombre est $\frac{4n}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha}$. De ce nombre, une portion $\frac{\sin\varphi \, d\varphi}{2} \frac{d\theta}{2\pi}$ se meut parallèlement à l'axe du cylindre qui a la direction (φ, θ),

et le sens de ce mouvement peut être supposé tourné vers le point en repos. Si à un pareil cylindre, ayant pour base πs^2, nous donnons une hauteur $v\,dt$, toutes les molécules, qui dans ce cylindre sont dirigées suivant l'axe, atteindront dans le temps dt la molécule en repos. Le nombre en est:

$$n\pi s^2 v\,dt \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Pour le nombre total des chocs en 1 seconde, nous trouvons donc, tout comme dans le cas (a), $n\pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$, de sorte que, sous ce rapport, ces deux cas peuvent être regardés comme équivalents.

c. Le troisième cas peut être ramené au second, par l'introduction du mouvement relatif de toutes les autres molécules par rapport à celle qui est spécialement considérée.

Soit v la vitesse de cette molécule, et u celle des autres, cette dernière vitesse étant toujours supposée dirigée vers la molécule en question. Désignons par φ l'angle de ces vitesses; la vitesse relative est alors $= \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\varphi}$, et, en attribuant cette vitesse aux autres molécules, nous pouvons regarder la molécule elle-même comme amenée au repos. Opérant ensuite comme dans le cas (b), nous trouvons que la molécule animée de la vitesse v subit par seconde un nombre de chocs égal à

$$n\pi s^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \int_0^\pi \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\varphi}\, \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

La valeur de $\int_0^\pi \sqrt{(v^2 + u^2 + 2uv\cos\varphi)}\, \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2}$ est différente suivant qu'on suppose $u < v$ ou $u > v$. Dans le premier cas on trouve $v + \frac{u^2}{3v}$, dans le second $u + \frac{v^2}{3u}$. L'intégrale ci-dessus se partage donc en deux autres:

$$n\pi s^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^v \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \left(v + \frac{u^2}{3v}\right) + \int_v^\infty \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \left(u + \frac{v^2}{3u}\right) \right\}$$

et la valeur moyenne du nombre des chocs d'une molécule, par seconde, devient:

$$N = n\pi s^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \left\{ \int_0^v \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \left(v + \frac{u^2}{3v}\right) + \int_v^\infty \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \left(u + \frac{v^2}{3u}\right) \right\}$$

Cette intégrale peut être trouvée de la manière suivante:

Si nous supposons deux axes perpendiculaires entre eux, sur lesquels u et v soient portés comme coordonnées, nous pouvons regarder chacune des deux parties de l'intégrale, par exemple

$$\int_0^\infty \int_v^\infty \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \cdot \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \left(u + \frac{v^2}{3u}\right), \text{ }^{1})$$

comme un volume compris entre le plan U V et une surface ayant pour équation

$$z = \text{le facteur de } du\ dv.$$

De la valeur des limites de u, à savoir $u = 0$ et $u = v$, il suit que l'intégrale doit s'étendre au-dessus des parties du plan U V comprises entre l'axe des U et la bissectrice de l'angle que forment entre eux l'axe des U et l'axe des V; d'un autre côté, les limites de v, 0 à ∞, montrent que l'intégrale s'étend sur la totalité de cette huitième partie du plan U V. Si nous introduisons des coordonnées polaires, en faisant $u = r \cos\psi$ et $v = r \sin\psi$, le volume considéré devient:

$$\alpha \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{r^6}{\alpha^6} \frac{dr}{\alpha} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \left(\sin^2\psi - \frac{2}{3} \sin^4\psi\right) \cos\psi\, d\psi.$$

[1]) La transformation que j'ai fait subir à cette intégrale, pour en calculer la valeur, n'est pas nécessaire pour cette partie-ci de N, — mais elle me paraît indispensable pour l'autre partie.

Pour l'autre partie de l'intégrale de N, nous trouvons, en remplaçant *cos* ψ par *sin* ψ, et réciproquement:

$$\alpha \int_0^\infty \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r^6}{\alpha^6} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \frac{dr}{\alpha} \left(\cos^2 \psi - \frac{2}{3} \cos^4 \psi \right) \sin \psi \, d\psi ;$$

les limites de u étant 0 et v, cette partie de l'intégrale doit s'étendre sur le reste du quadrant.

Si dans la dernière intégrale on pose $\psi = \frac{1}{2}\pi - \psi'$, elle devient

$$\alpha \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \frac{r^6}{\alpha^6} \frac{dr}{\alpha} \left(\sin^2 \psi' - \frac{2}{3} \sin^4 \psi' \right) \cos \psi' \, d\psi',$$

ce qui montre que les deux parties de N ont des valeurs égales.

Chacune de ces intégrales a pour valeur $\frac{2\sqrt{\pi}}{16}\sqrt{2}$, de sorte qu'on a:

$$N = n\pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}.$$

En rapprochant ce résultat de celui obtenu dans les cas (a) et (b)' on retrouve la valeur $\sqrt{2}$ assignée par M. Maxwell au rapport des nombres de chocs dans les hypothèses en question.

5. Bien que le coefficient, par lequel on doit multiplier le résultat correspondant à l'hypothèse (a) et (b) pour obtenir le résultat correspondant à l'hypothèse (c), soit plus grand d'après M. Maxwell que d'après M. Clausius, le nombre des chocs, calculé suivant Maxwell, sera pourtant moindre que Clausius ne devrait le trouver, du moins s'il prenait toujours, pour la valeur moyenne de v, celle qui résulte de la force vive moyenne.

En effet, d'après le résultat obtenu par M. Maxwell, on a $N = n\pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}$, et comme nous avons vu précédemment

que $\alpha = V\sqrt{\frac{2}{3}}$, lorsque V désigne la vitesse indiquée par M. Clausius, il s'ensuit:

$$N = n\pi s^2 \frac{4}{3} V \sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Nous trouvons donc seulement $\sqrt{\frac{3}{\pi}} = 0,979$ du nombre auquel nous arriverions en attribuant à toutes les molécules une même vitesse, déduite de la force vive moyenne; dans ce cas, effectivement, le facteur serait, non pas $\sqrt{2}$, mais $\frac{4}{3}$, tel que le donne M. Clausius.

6. La différence des facteurs $\sqrt{2}$ et $\frac{4}{3}$ se fera sentir dans toute son importance à l'égard du chemin moyen parcouru entre deux chocs.

Ce que nous entendons par chemin moyen dans le cas (a) est facile à voir. C'est la valeur moyenne des chemins qu'une même molécule, conservant une vitesse invariable, parcourrait entre deux chocs successifs. Le nombre des chocs étant de $n\pi s^2 v$ par seconde, on doit avoir $n\pi s^2 v l = v$, ou $l = \frac{1}{n\pi s^2}$. Si la vitesse était supposée variable, nous n'en obtiendrions pas moins le même résultat. Remarquons, en effet, que la probabilité qu'à un moment donné la vitesse d'une molécule soit comprise entre v et $v + dv$, est égale en grandeur à la fraction du nombre total des molécules dont la vitesse se trouve entre v et $v + dv$. D'après les règles du calcul des probabilités, la molécule subit donc, dans le temps dt, un nombre de chocs égal à $\frac{4n}{\sqrt{\pi}} \pi s^2 \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} v dt$. Le chemin moyen l_1 doit être égal au chemin total parcouru en ce temps dt, divisé par le nombre des chocs. Or, toujours d'après le calcul des probabilités, ce chemin total est

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} v dt$$

de sorte qu'on trouve

$$l_1 = \frac{1}{n \pi s^2}.$$

Dans le cas (*b*), nous aurions à entendre par chemin moyen le chemin qu'une molécule parcourt en moyenne entre l'instant où a eu lieu un choc antérieur et celui où elle-même rencontre la molécule au repos. Il me paraît douteux que l'on trouve pour ce chemin la même valeur que dans le cas (*a*). Mais, comme la connaissance de ce résultat n'est pas nécessaire pour l'objet que nous avons en vue, je ne m'y arrête pas davantage.

Pour le chemin moyen dans l'hypothèse (*c*), chemin qui se définit de nouveau comme dans l'hypothèse (*a*), nous trouvons

$$l_2 = \frac{1}{n \pi s^2 \sqrt{2}},$$

attendu que chaque molécule subit en moyenne $n \pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}$ chocs et parcourt en moyenne un chemin $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$.

D'après M. Clausius, la valeur de l_1 serait:

$$l_2 = \frac{1}{n \pi s^2 \frac{4}{3}}.$$

7. Proposons-nous maintenant de déterminer l'influence qu'exercent sur le nombre des chocs les dimensions des molécules dans le sens de la direction du mouvement relatif.

Dans ma thèse inaugurale: *Over de continuiteit van den gas- en vloeistof-toestand*, j'ai fait remarquer que cette influence avait été négligée jusqu'ici, et j'ai essayé de la calculer. Bien que la manière dont j'ai alors présenté la démonstration du résultat obtenu prête, j'en conviens, à des critiques fondées, ce résultat n'en est pas moins parfaitement exact, ainsi que l'a montré M. D. J. Korteweg.

Ce n'est que tout récemment que M. Clausius a publié (*Ann. der Physik und Chemie von* Poggendorff, tome complém. VII, fasc. 2, p. 242 et suiv.) un travail dans lequel, ignorant peut-être que la chose eût déjà été faite, il examine l'influence de l'épaisseur des molécules sur le nombre des chocs. M. Clausius, toutefois, trouve pour cette influence une valeur double de celle que j'avais obtenue moi-même. Cette circonstance m'a engagé à reprendre l'étude de la question, et je suis ainsi arrivé à confirmer mon résultat antérieur, par une voie que je crois devoir communiquer, bien qu'elle se rapproche à certains égards de celle qu'a suivie M. Korteweg.

Au paragraphe 4, nous avons trouvé, dans le cas (c), qu'une molécule animée d'une vitesse v reçoit, des molécules animées d'une vitesse comprise entre u et $u + du$ et ayant une direction (φ, θ) par rapport à la direction de la vitesse u, un nombre de chocs donné par l'expression:

$$\frac{4 n \pi s^2}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \sqrt{v^2 + u^2 + 2 uv \cos\varphi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{2} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

C'est là ce qui arriverait, si l'on pouvait négliger l'épaisseur des molécules, dans la durée d'une seconde; nous allons maintenant voir de combien cette durée est abrégée quand on tient compte de l'épaisseur. Pour cela, cherchons le raccourcissement qu'éprouve le chemin relatif lorsqu'on attribue aux molécules des dimensions dans le sens de ce chemin relatif. Concevons une des molécules amenée au repos; nous avons alors pris ci-dessus, pour instant du choc, celui où la molécule en mouvement était la projection de la molécule arrêtée sur la direction du mouvement — relatif en ce cas; en d'autres termes, celui où le centre de la molécule mobile était arrivé dans un plan central perpendiculaire au mouvement relatif. Le raccourcissement du chemin relatif doit donc être l'une ou l'autre ordonnée de la surface d'une sphère concentrique à la molécule conçue au repos et ayant un rayon égal au diamètre de la molécule, — cette ordonnée étant toujours perpendiculaire au plan central désigné ci-dessus. En moyenne,

ce raccourcissement sera $\frac{2}{3}s$, valeur qui se déduit du volume de la demi-sphère, attendu que la probabilité, qu'une molécule rencontre le plan central en un certain point, est la même pour tous les points. Mais ces $\frac{2}{3}s$ sont le raccourcissement du chemin relatif, et il en revient une partie, savoir

$$\frac{u}{\sqrt{(v^2+u^2+2uv\cos\varphi)}},$$

au compte de la molécule choquante, une autre partie,

$$\frac{v}{\sqrt{(v^2+u^2+2uv\cos\varphi)}},$$

au compte de la molécule choquée, de sorte que, pour chacun des chocs subis par cette dernière, le chemin parcouru par la molécule choquante est raccourci, en moyenne, de

$$\frac{2}{3}s\frac{u}{\sqrt{(v^2+u^2+2uv\cos\varphi)}}.$$

Sommant cette expression pour tous les chocs, on a

$$\frac{2}{3}s\pi ns^2\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{u^2}{\alpha^2}e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\frac{du}{\alpha}\int_0^\pi\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi},$$

intégrale dont la valeur est:

$$\frac{2}{3}n\pi s^3\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}.$$

Comme cette valeur est indépendante de la vitesse v, elle s'applique à toutes les molécules. Cette même valeur se retrouve aussi lorsqu'on cherche, pour la molécule supposée au repos, de combien est raccourci, maintenant qu'on tient compte de l'épaisseur, le chemin qu'elle a à parcourir pour recevoir le nombre de chocs trouvé précédemment, $n\pi s^2\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}$. Sans épaisseur, elle devait faire le chemin $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$ pour recevoir ce nom-

bre de chocs ; maintenant, elle doit faire le chemin $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{3} n\pi s^3 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$. L'inverse du rapport de ces deux chemins donne le rapport entre les nombres des chocs subis en un temps égal. Ce dernier rapport sera donc

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{3} n \pi s^3},$$

ou, en représentant par v le volume extérieur, et par b_1 le volume des molécules qui y sont contenues,

$$\frac{v}{v - 4b_1},$$

forme sous laquelle je l'avais présenté antérieurement.

M. Clausius trouve pour ce rapport :

$$\frac{v}{v - 8b_1}.$$

8. Il n'est peut-être pas sans intérêt de rappeler comment M. Clausius parvient à son résultat et de montrer ce qui donne lieu à l'introduction du facteur 8. M. Clausius se figure une seule molécule en mouvement, et les autres en repos. Il réduit cette molécule mouvante à un point, tandis qu'il attribue aux autres un rayon double. Un point se meut alors dans un espace qui est diminué de 8 fois le volume des molécules. Et en effet, si le cas se présentait de telle sorte, qu'une molécule se mût au milieu de molécules *fixes*, c'est-à-dire *restant en repos* même après le choc, le résultat obtenu par M. Clausius serait justifié. Mais, pour le cas tel qu'il se présente en réalité, on peut montrer, de deux manières différentes, qu'il ne faut prendre que la moitié de 8. D'abord, on remarquera que dans un choc où les deux molécules se meuvent, ce qui naturellement est le cas ordinaire, le raccourcissement du chemin, tel que le considère M. Clausius, ne peut pas être mis en entier sur le compte de l'une des deux molécules ; que, par conséquent, ce que M. Clausius attribue à une seule molécule, appartient à un ensemble de deux

molécules. En second lieu, même en supposant toutes les molécules arrêtées pour un instant, à une seule près, que nous laisserions se mouvoir, nous trouverions encore la moitié de 8, à moins de regarder, en outre, les molécules comme *fixes;* or, s'il peut être permis de se figurer les molécules en repos pour un instant, nous ne saurions, sans introduire des forces qui changeraient complétement la nature du phénomène, les supposer *fixes;* elles obéiraient alors aux lois de la répulsion d'une autre manière que lorsque, après les avoir privées de mouvement, nous leur laissons au moins la mobilité. Si les molécules censées en repos conservent leur mobilité, une molécule choquante se mouvra, après le choc, suivant la tangente au point où la molécule en repos a été heurtée. La composante normale de la vitesse, en effet, se transmet entièrement à la molécule en repos; la composante tangentielle seule est conservée. Il résulte de là qu'au commencement de chaque nouveau chemin il n'y a aucune perte de distance par suite du choc, tandis que, selon la manière de voir de M. Clausius, il se perdrait chaque fois un certain chemin, tant au commencement qu'à la fin.

9. En résumé, nous avons reconnu:

a. que le rapport entre les nombres des chocs qu'une molécule subit, suivant qu'elle se meut au milieu de molécules en mouvement ou au milieu de molécules censées en repos, a été fixé avec raison à $\sqrt{2}$ par M. Maxwell, lorsqu'on néglige la dimension des molécules dans la direction du mouvement relatif.

b. que, si l'on tient compte de cette dimension, le nombre des chocs, subis par une molécule qui se meut au milieu de molécules en mouvement, doit encore être multiplié par $\frac{v}{v-4b_1}$.

En représentant par α la vitesse la plus fréquente, et par A la partie du volume apparent qui est occupée par les molécules, on aura donc pour le nombre des chocs en une seconde

$$N = n\pi s^2 \frac{2\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1-4A},$$

ou, V étant la vitesse moyenne déduite de la force vive,

$$N = n \pi s^2 \frac{4}{3} V \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 - 4A} .$$

c. que la valeur du chemin moyen parcouru entre deux chocs, telle que M. Clausius l'a donnée dans le passage suivant [1]: „le chemin moyen d'une molécule est au huitième de son diamètre comme la partie de l'espace laissée en dehors des sphères d'activité des molécules est à la partie de l'espace occupée par ces sphères d'activité" — que cette valeur, dis-je, est inexacte sous deux rapports. Suivant M. Clausius on aurait

$$\frac{l}{\frac{1}{8} s} = \frac{v (1 - 8 A)}{b_1};$$

ici nous avons trouvé:

$$\frac{l}{\frac{1}{8} s} = \frac{v (1 - 4 A)}{b_1 \frac{3}{4} \sqrt{2}}.$$

L'application de cette formule est limitée au cas où la probabilité, que plus de 2 molécules viendront se choquer simultanément, peut être réputée 0 par rapport à la probabilité du conflit entre deux molécules seulement. La formule suppose, en outre, que le volume d'une molécule n'éprouve aucun changement par le choc, ou, si un changement a lieu, qu'il est indépendant de la vitesse de la molécule choquante.

---

[1]) Pogg. *Ann.*, t. compl. VII, fasc. 2, p. 250.

La Haye, 17 Déc. 1875.

SUR LE

NOMBRE DES CHOCS ET LA DISTANCE DE CHOC MOYENNE

DANS LES MÉLANGES GAZEUX,

PAR

J. D. VAN DER WAALS.

Supposons qu'un volume, égal à l'unité, contienne deux espèces de molécules. Le premier groupe, que nous appellerons le groupe A, sera déterminé par la valeur α de la vitesse qui s'y rencontre le plus communément, ou par la valeur $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$ de la vitesse moyenne, ou par la valeur moyenne $\alpha\sqrt{\frac{3}{2}}$ du carré de la vitesse. Pour le groupe B, ces mêmes grandeurs seront β, $\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}$ et $\beta\sqrt{\frac{3}{2}}$. Soit n le nombre des molécules du groupe A, et n_1 celui des molécules du groupe B, — nous nous proposons de déterminer le nombre des chocs que chaque molécule subit, (*a*) de la part des molécules de son propre système, (*b*) de la part des molécules de l'autre système, et de déterminer, en outre, la longueur moyenne du chemin parcouru entre deux chocs successifs; ces déterminations étant faites en tenant compte de la dimension des molécules dans la direction du mouvement relatif. Pour le cas où l'on néglige cette dimension, le problème a déjà été traité par M. Maxwell, dans un Mémoire devenu célèbre (*Phil. Mag.*, XIX).

L'introduction de cette donnée rendait nécessaire un mode de calcul un peu différent.

2. Prenons une molécule du groupe A. Comme nous pouvons de nouveau admettre [1]) que pour toutes les directions, passant par un point quelconque, la loi des vitesses est la même, le nombre des molécules du groupe A, qui ont une vitesse comprise entre v et $v + dv$, sera donné, quelle que soit d'ailleurs la condition qui détermine la valeur de α et de β pour chacun des deux systèmes, par la loi de Maxwell, c'est-à-dire qu'il sera:

$$n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha}.$$

Désignons par u la vitesse des autres molécules du même système; le nombre des chocs, qu'une molécule du groupe A reçoit des molécules de son propre système, sera alors exprimé, comme nous l'avons montré ailleurs, par l'intégrale suivante:

$$N_{11} = n \pi s^2 \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \frac{du}{\alpha} \times$$

$$\int_0^\pi \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\varphi}\, \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}$$

ou

$$N_{11} = n \pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}.$$

3. D'une manière analogue, on trouve que le nombre des chocs qu'une molécule du groupe A reçoit des molécules du groupe B est représenté par:

---

[1]) Voir un Mémoire antérieur sur la distance de choc dans un gaz homogène.

$$N_{12} = n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \times$$

$$\int_0^\pi \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\varphi}\, \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Cette intégrale se ramène à:

$$n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \times$$

$$\left\{\int_0^v \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta}\left(v + \frac{u^2}{3v}\right) + \int_v^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta}\left(u + \frac{v^2}{3u}\right)\right\}.$$

Cherchons la valeur de chacune des deux parties de N_{12}, par exemple de la première partie

$$\int_0^\infty \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_0^v \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta}\left(v + \frac{u^2}{3v}\right).$$

Pour cela, nous introduirons deux nouvelles variables, données par les équations $u = \beta x$ et $v = \alpha y$; les limites de x deviennent $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{\alpha}{\beta} y$, tandis que celles de y sont 0 et ∞.

Nous obtenons alors:

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy \int_0^{\frac{\alpha}{\beta} y} x^2 e^{-x^2} \left(\alpha y + \frac{\beta^2 x^2}{3\alpha y}\right) dx.$$

Si nous supposons deux axes perpendiculaires entre eux, sur lesquels x et y soient portés comme coordonnées, nous pouvons regarder cette dernière intégrale comme un volume, compris entre le plan XY et une surface ayant pour équation:

$$z = y^2 e^{-y^2} x^2 e^{-x^2} \left(\alpha y + \frac{\beta^2 x^2}{3\alpha y}\right).$$

En introduisant des coordonnées polaires, et posant pour cela $x = r \cos\psi$ et $y = r \sin\psi$, nous trouvons:

$$z = r^5 e^{-r^2} \left(\alpha \sin^2\psi \cos^2\psi + \frac{\beta^2}{3\alpha} \cos^4\psi \right) \sin\psi.$$

Les limites de x, à savoir 0 et $\frac{\alpha}{\beta} y$, montrent que l'intégrale doit s'étendre sur des parties du plan XY comprises entre l'axe Y et une ligne dont l'équation est:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x.$$

On déduit de là les limites de ψ, savoir $\psi_1 = arc\,tg\,\frac{\beta}{\alpha}$ et $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$; d'un autre côté, les limites de y, qui sont 0 et ∞, montrent que r devra pareillement être pris de 0 à ∞. Nous avons donc à déterminer:

$$\int_0^\infty r^6 e^{-r^2} dr \int_{arc\,tg\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\alpha \sin^2\psi \cos^2\psi + \frac{\beta^2}{3\alpha} \cos^4\psi \right) \sin\psi\, d\psi.$$

Par la substitution $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$, cette expression prend la forme:

$$\int_0^\infty r^6 e^{-r^2} dr \int_0^{arc\,sin\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \left(\alpha \sin^2\psi' \cos^2\psi' + \frac{\beta^2}{3\alpha} \sin^4\psi' \right) \cos\psi'\, d\psi'$$

et devient par conséquent égale à:

$$\frac{15}{16}\sqrt{\pi} \cdot \frac{2}{15\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^3}.$$

De la même manière, nous trouvons pour l'autre partie de N_{12}, c'est-à-dire pour

$$\int_0^\infty \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_v^\infty \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \left(u + \frac{v^2}{3u}\right),$$

la valeur

$$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{3\alpha^2\beta^4+\beta^6}{(\alpha^2+\beta^2)^3}$$

ou

$$N_{12} = n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

4. Abstraction faite de la dimension des molécules suivant la direction du mouvement relatif, le nombre des chocs, par seconde de temps, est donc pour chaque molécule du groupe A:

$$N_1 = n\pi s^2 \frac{2\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\pi}},$$

et pour chaque molécule du groupe B:

$$N_2 = n_1 \pi s_1{}^2 \frac{2\beta\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + n\pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \frac{2\sqrt{\alpha+\beta^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Dans la même hypothèse, le chemin moyen parcouru entre deux chocs est pour une molécule du groupe A:

$$\frac{1}{l_1} = n\pi s^2 \sqrt{2} + n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}},$$

et pour une molécule du groupe B:

$$\frac{1}{l_2} = n_1 \pi s_1{}^2 \sqrt{2} + n\pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}}.$$

Le nombre total des chocs, que les molécules du premier groupe subissent entre elles, s'élève par seconde à $\frac{1}{2} n^2 \pi s^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}$;

pour les molécules du second groupe, considérées entre elles, ce nombre est $\frac{1}{2} n_1{}^2 \pi s_1{}^2 \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}$. Le nombre des chocs des molécules hétérogènes s'élève à $n n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\pi}}$.

Si l'on veut savoir combien de fois par seconde commence un chemin nouveau, on doit prendre le double des quantités précédentes.

5. Nous allons maintenant déterminer les modifications que ces grandeurs éprouvent lorsqu'on tient compte de la dimension des molécules dans la direction du mouvement relatif. Pour cela, nous avons besoin de connaître la réduction que subit en ce cas, comparativement au cas où l'on néglige cette dimension, le chemin à parcourir pour un même nombre de chocs. Evaluons cette réduction pour les chocs des molécules hétérogènes. A chaque rencontre, il y a alors, en moyenne, une différence en moins de $\frac{2}{3} \frac{s+s_1}{2}$ sur le chemin relatif à parcourir. Pour l'une des deux molécules, le raccourcissement du chemin est donc, à chaque choc:

$$\frac{2}{3} \frac{s+s_1}{2} \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\varphi}},$$

et pour l'autre:

$$\frac{2}{3} \frac{s+s_1}{2} \frac{u}{\sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\varphi}}.$$

Pour un nombre de chocs égal à

$$n n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \int \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int \frac{4u^2}{\sqrt{\pi}\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\varphi}$$

le raccourcissement total s'élève donc à:

$$\frac{2}{3} n n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^3 \frac{2(\alpha+\beta)}{\pi}.$$

Si nous cherchons le raccourcissement pour les chocs des molécules du groupe A entre elles, nous trouvons $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}n^2\pi s^3\frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}}$, et pour ceux des molécules du groupe B entre elles $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}n_1{}^2\pi s_1{}^2\frac{4\beta}{\sqrt{\pi}}$. Or, en négligeant l'épaisseur des molécules, il y avait à parcourir, pour le nombre de chocs déterminé dans cette hypothèse, un chemin total de $n\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}+n_1\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}$; en tenant compte de cette épaisseur, les molécules n'auront donc à parcourir qu'un chemin

$$n\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}+n_1\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}n^2\pi s^3\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}n_1{}^2\pi s_1{}^2\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{3}nn_1\pi\left(\frac{s+s_1}{2}\right)^3\frac{2(\alpha+\beta)}{\sqrt{\pi}}$$

pour produire le même nombre de chocs. On aura donc en un temps moindre le même nombre de chocs, ou en 1 seconde un nombre de chocs égal à

$$\frac{\frac{1}{2}n^2\pi s^2\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}+nn_1\pi\left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2\frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}n_1{}^2\pi s_1{}^2\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}}{1-\frac{2}{3}n\pi s^3\frac{n\alpha}{n\alpha+n_1\beta}-\frac{2}{3}n_1\pi s_1{}^3\frac{n_1\beta}{n\alpha+n_1\beta}-\frac{2}{3}nn_1\pi\left(\frac{s+s_1}{2}\right)^3\frac{\alpha+\beta}{n\alpha+n_1\beta}}.$$

Pour $s=s_1$, le dénominateur devient $1-\frac{2}{3}(n+n_1)\pi s^3$, et lorsque s et s_1 ont des valeurs différentes, $1-\frac{2}{3}n\pi s^3-\frac{2}{3}n_1\pi s_1{}^3$ peut être pris comme valeur approchée; c'est-à-dire que le volume est diminué de 4 fois le volume des molécules.

6. On trouvera de la manière suivante à quelle condition les valeurs de α et β doivent satisfaire pour que les deux systèmes puissent présenter l'état stationnaire que nous leur avons supposé.

Lorsque deux molécules, de masses m et m_1, se rencontrent, et que leurs vitesses v et u font des angles φ et ψ avec la normale au plan tangent commun, la théorie du choc des corps parfaitement élastiques fait connaître la vitesse après la rencontre;

pour la molécule à masse m, par exemple, cette vitesse sera donnée par l'équation:

$$v'^2 = v^2 - \frac{4m_1}{(m+m_1)^2}\left[mv^2 cos^2\varphi - m_1 u^2 cos^2\psi - (m-m_1) uv cos\varphi cos\psi\right].$$

A chaque choc d'une molécule du groupe A avec une molécule du groupe B, la première perd donc une quantité de force vive égale à:

$$V = \frac{2mm_1}{(m+m_1)^2}\left\{mv^2 cos^2\varphi - m_1 u^2 cos^2\psi - (m-m_1) uv cos\varphi cos\psi\right\}$$

Voyons ce que devient la valeur moyenne de cette expression lorsque, les valeurs de u et de v étant données, nous attribuons à φ et à ψ les valeurs possibles dans ce cas. Evidemment, nous n'avons pas le droit de regarder comme également probables, lors du choc, toutes les directions de u et de v par rapport à la normale au plan tangent. La valeur moyenne de V dépendra, non-seulement de la grandeur de u et de v, mais aussi de l'angle que leurs directions font entre elles. Voici comment on peut trouver cette valeur moyenne, en s'aidant d'une figure très simple, dont nous laisserons d'ailleurs au lecteur la construction. Menons, d'un point O, les droites OA et OB, qui comprennent l'angle θ. Prenons $OA = v$ et $OB = u$, de manière que ces droites représentent en direction et en grandeur les vitesses des molécules choquantes. Si de B nous menons la droite BC, parallèle et égale à v, mais dirigée en sens opposé, OC représentera le mouvement relatif de la seconde molécule par rapport à la première. En supposant construite autour de O une sphère coupée par un plan passant par le centre et perpendiculaire au mouvement relatif, une des moitiés seulement de la surface sphérique contiendra des points qui, joints à O, indiquent des positions possibles de la normale du choc, au moins tant que u, v et θ ne changent pas. Sur cette demi-surface sphérique, les points en question sont distribués de telle sorte, que leurs projections sur le plan central se trouvent réparties uniformément.

Prenons maintenant pour pôle le point où le mouvement relatif coupe la sphère, et pour premier méridien le plan qui passe par u et v; soient γ la distance polaire et δ la longitude; la probabilité, que lors du choc la normale prenne la position (γ, δ), sera représentée par

$$\sin\gamma \, d \, \sin\gamma \, \frac{d\delta}{2\pi},$$

et nous avons donc à déterminer:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\delta}{2\pi}\int_0^1 \frac{2mm_1}{(m+m_1)^2}\left[mv^2\cos^2\varphi - m_1 u^2\cos^2\varphi - (m-m_1)uv\cos\varphi\cos\psi\right]\sin\gamma d\sin\gamma$$

ce qui ne peut se faire qu'après avoir exprimé φ et ψ en γ et δ. Désignons, à cet effet, par a, b et c les points où les droites OA, OB et OC coupent la sphère, et par α et β les arcs ac et bc; le triangle sphérique, qui a pour sommets a, c et le point P de la sphère vers lequel la normale est supposée dirigée, donnera:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos\delta$$

ainsi que

$$\cos\psi = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\delta.$$

Substituant ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, et remarquant qu'on a

$$\int_0^1 \sin\gamma\, d\sin\gamma \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\delta = \frac{\pi}{4}(2 - \sin^2\alpha)$$

$$\int_0^1 \sin\gamma\, d\sin\gamma \int_0^{2\pi} \cos^2\psi\, d\delta = \frac{\pi}{4}(2 - \sin^2\beta)$$

$$\int_0^1 \sin\gamma d\sin\gamma \int_0^{2\pi} \cos\varphi\cos\psi d\delta = \frac{\pi}{4}(2\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{\pi}{4}(2\cos\theta - \sin\alpha\sin\beta),$$

on trouve:

$$\frac{1}{2}\frac{mm_1}{(m+m_1)^2}\Big\{\left[mv^2 - m_1u^2 - (m-m_1)uv\cos\theta\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[mv^2\sin^2\alpha - m_1u^2\sin^2\beta - (m-m_1)uv\sin\alpha\sin\beta\right]\Big\}$$

expression qui, à cause de

$$m v^2 \sin^2 \alpha - m_1 u^2 \sin^2 \beta - (m - m_1) u v \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

se réduit à:

$$\frac{1}{2} \frac{m m_1}{(m + m_1)^2} \left\{ m v^2 - m_1 u^2 - (m - m_1) u v \cos \theta \right\}.$$

Comme la probabilité que, dans le temps dt, une molécule du 1er groupe animée d'une vitesse v viendra rencontrer une molécule du 2e groupe animée d'une vitesse u, et qu'en outre ces vitesses feront entre elles un angle θ, est, d'après ce qui précède, égale à

$$dt n_1 \pi \left(\frac{s+s_1}{2}\right)^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \sqrt{v^2+u^2-2uv\cos\theta} \frac{\sin\theta d\theta}{2},$$

nous avons encore, pour obtenir la perte moyenne de force vive d'une molécule du groupe A, à trouver la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \int_0^\pi \sqrt{(v^2 + u^2 - 2 uv \cos \theta)} \frac{\frac{1}{2} m m_1}{(m+m_1)^2} \times$$
$$\left\{ m v^2 - m_1 u^2 - (m - m_1) u v \cos \theta \right\} \frac{\sin \theta \, d\theta}{2}.$$

Cette intégrale se laisse déterminer par une méthode analogue à celle que nous avons déjà suivie ci-dessus.

Indiquons, dans ses traits principaux, la marche de l'opération et l'ordre successif des résultats.

Il faut de nouveau distinguer les deux cas de $v > u$ et $v < u$.

Si l'on a $v > u$, l'intégration par rapport à θ donne:

$$\frac{1}{4} \frac{m m_1}{(m+m_1)^2} \left\{ 2 m \left(v^3 + \frac{2}{3} v u^2 - \frac{1}{15} \frac{u^4}{v} \right) - \frac{8}{3} m_1 \left(v u^2 + \frac{1}{5} \frac{u^4}{v} \right) \right\}.$$

Si, au contraire, v est $< u$, on obtient:

$$\frac{1}{4} \frac{m m_1}{(m+m_1)^2} \left\{ \frac{8}{3} m \left(u v^2 + \frac{1}{5} \frac{v^4}{u} \right) - 2 m_1 \left(u^3 + \frac{2}{3} u v^2 - \frac{1}{15} \frac{v^4}{u} \right) \right\}.$$

Pour $v > u$, on doit donc chercher:

$$\int_0^\infty \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_0^v \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \left\{ 2m\left(v^3 + \frac{2}{3} vu^2 - \frac{1}{15}\frac{u^4}{v} \right) - \frac{8}{3} m_1 \left(vu^2 + \frac{1}{5}\frac{u^4}{v} \right) \right\}$$

et pour $v < u$:

$$\int_0^\infty \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{dv}{\alpha} \int_v^\infty \frac{u^2}{\beta^2} e^{-\frac{u^2}{\beta^2}} \frac{du}{\beta} \left\{ \frac{8}{3} m \left(uv^2 + \frac{1}{5}\frac{v^4}{u} \right) - 2m_1 \left(u^3 + \frac{2}{3} uv^2 - \frac{1}{15}\frac{v^4}{u} \right) \right\}.$$

Faisons, dans la première de ces intégrales, $v = \alpha x$ et $u = \beta y$, puis $x = r \cos \varphi$ et $y = r \sin \varphi$; elle devient:

$$\int_0^\infty r^8 e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \sin^2 \varphi \left\{ 2m \left(\alpha^3 \cos^4 \varphi + \frac{2}{3} \alpha \beta^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \beta - \frac{1}{15} \frac{\beta^4}{\alpha} \sin^4 \varphi \right) \right.$$
$$\left. - \frac{8}{3} m_1 \left(\alpha \beta^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \frac{1}{5} \frac{\beta^4}{\alpha} \sin^4 \varphi \right) \right\} d \sin \varphi.$$

Ces mêmes substitutions ramènent la seconde intégrale à la forme:

$$-\int_0^\infty r^8 e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \sin^2 \psi \left\{ 2m_1 \left[\beta^3 \cos^4 \psi + \frac{2}{3} \beta \alpha^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \frac{1}{15} \frac{\alpha^4}{\beta} \sin^4 \psi \right] \right.$$
$$\left. - \frac{8}{3} m \left(\beta \alpha^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \frac{1}{5} \frac{\alpha^4}{\beta} \sin^4 \psi \right) \right\} d \sin \psi.$$

La valeur de la première intégrale est:

$$\int_0^\infty r^8 e^{-r^2} dr \left\{ \frac{16\, m\, \alpha^2}{105 \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}^7} \left[\alpha^8 + 4\alpha^6 \beta^2 + 6 \alpha^4 \beta^4 \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{16\, m_1 \beta^2}{105 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^7} \left[\alpha^8 + 4 \alpha^6 \beta^2 \right] \right\}.$$

La valeur de la seconde se trouve en prenant la première négativement et en y permutant α et β, m et m_1; elle est donc:

$$\int_0^\infty r^8 e^{-r^2} dr \left\{ \frac{16\, m\, \alpha^2}{105 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{\,7}} \left[\beta^2 + 4\, \beta^6 \alpha^2\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{16\, m_1\, \beta^2}{105 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{\,7}} \left[\beta^8 + 4 \beta^6 \alpha^2 + 6\, \alpha^4 \beta^4\right] \right\}.$$

La somme donne:

$$\int_0^\infty r^8\, e^{-r^2} dr \frac{16}{105} \frac{m\, \alpha^2 - m_1\, \beta^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}^{\,7}} \left[\alpha^8 + 4\alpha^6 \beta^2 + 6\alpha^4 \beta^4 + 4\alpha^2 \beta^6 + \beta^8\right]$$

ou

$$\int_0^\infty r^8\, e^{-r^2} dr\, \frac{16}{105} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ m\, \alpha^2 - m_1\, \beta^2 \right\}.$$

La perte de force vive pour une molécule du groupe A, par suite de ses chocs avec les molécules du groupe B, s'élève donc, dans le temps dt, à

$$dt\, n_1\, \pi \left(\frac{s + s_1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{m\, m_1}{(m + m_1)^2} \left(m\, \alpha^2 - m_1\, \beta^2\right)$$

ou

$$dt\, N_{12}\, \frac{m\, m_1}{(m + m_1)^2} \left(m\, \alpha^2 - m_1\, \beta^2\right).$$

Si nous représentons la valeur moyenne de la force vive des molécules du groupe A par $\frac{1}{2}\, m \overline{v^2}$, et du groupe B par $\frac{1}{2}\, m_1 \overline{v_1^2}$, l'expression trouvée en dernier lieu devient:

$$dt\, N_{12}\, \frac{2}{3} \frac{m\, m_1}{(m + m_1)^2} \left(\overline{m\, v^2} - \overline{m_1\, v_1^2}\right).$$

Pour la persistance de l'état stationnaire supposé, il est donc nécessaire et suffisant que la force vive moyenne d'une molécule soit la même dans les deux systèmes.

La Haye, 29 Déc. 1875.

SUR
L'EMPLOI DES DÉTERMINANTS
DANS
LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS,

PAR

P. VAN GEER.

---

§ 1.

Soit un certain nombre d'équations linéaires, mises sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots\ldots + p_1x_n = F_1 , \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots\ldots + p_2x_n = F_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx_1 + b_mx_2 + c_mx_3 + \ldots\ldots + p_mx_n = F_m ; \end{array}\right\} \ldots (1)$$

où x_1, x_2 . . . . x_n sont les grandeurs à déterminer, au nombre de n; m le nombre des équations, tel qu'on ait $m > n$; F_1 . . . F_m des grandeurs données par l'expérience; on trouve alors, suivant la méthode connue de Gauss, les valeurs les plus probables qui satisfont au système entier (1), à l'aide du système normal

$$\left.\begin{array}{l} (gaa)x_1 + (gab)x_2 + (gac)x_3 + \ldots\ldots (gap)x_n = (ga\,F) , \\ (gba)x_1 + (gbb)x_2 + (gbc)x_3 + \ldots\ldots (gbp)x_n = (gb\,F) , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (gpa)x_1 + (gpb)x_2 + (gpc)x_3 + \ldots\ldots (gpp)x_n = (gp\,F) ; \end{array}\right\} \ldots (2)$$

dans lequel $g_1, g_2 \ldots g_n$ sont les poids des grandeurs F de même indice, et où l'on a:

$$\left.\begin{array}{r}(gaa)=g_1a_1{}^2+g_2a_2{}^2+\ldots\ldots g_ma^2{}_m,\\(gba)=(gab)=g_1a_1b_1+g_2a_2b_2+\ldots\ldots g_ma_mb_m,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(gaF)=g_1a_1F_1+g_2a_2F_2+\ldots\ldots g_ma_mF_m.\end{array}\right\}\ldots(3)$$

Les n inconnues peuvent être tirées des n équations linéaires (2), et Gauss lui-même a exposé la méthode à suivre pour y arriver par des substitutions successives. On ne saurait contester, toutefois, que ce mode de solution n'exige des calculs très longs, et que surtout la recherche des coefficients auxiliaires ne soit une opération laborieuse, dans laquelle on court aisément le danger de commettre des erreurs de calcul, qui finalement font perdre tout le fruit du travail.

Si l'on a recours, pour résoudre les équations (2), à la méthode des déterminants, les inconnues peuvent être mises immédiatement sous cette forme:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\ldots\ldots x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},\ldots(4)$$

où l'on a

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=\begin{vmatrix}(gaa)(gab)(gac)\ldots(gap)\\(gba)(gbb)(gbc)\ldots(gbp)\\(gca)(gcb)(gcc)\ldots(gcp)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(gpa)(gpb)(gpc)\ldots(gpp)\end{vmatrix},\quad\Delta_1=\begin{vmatrix}(gaF)(gab)\ldots(gap)\\(gbF)(gbb)\ldots(gbp)\\(gcF)(gcb)\ldots(gcp)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\(gpF)(gpb)\ldots(gpp)\end{vmatrix},\\\Delta_2=\begin{vmatrix}(gaa)(gaF)(gac)\ldots(gap)\\(gba)(gbF)(gbc)\ldots(gbp)\\(gca)(gcF)(gcc)\ldots(gcp)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(gpa)(gpF)(gpc)\ldots(gpp)\end{vmatrix},\quad\Delta_n=\begin{vmatrix}(gaa)(gab)(gac)\ldots(gaF)\\(gba)(gbb)(gbc)\ldots(gbF)\\(gca)(gcb)(gcc)\ldots(gcF)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(gpa)(gpb)(gpc)\ldots(gpF)\end{vmatrix}\end{array}\right\}(5)$$

Ce mode de solution offre un double avantage. En premier lieu, les inconnues, quelque grand que soit leur nombre ou celui des équations, sont immédiatement exprimées sous une forme finie

en fonction des données ; de sorte que l'établissement des équations normales (2) est même devenu superflu, et que, des équations données (1), on peut directement déduire les valeurs exprimées en (4) et (5); avantage que ne présente aucune autre méthode de solution.

Secondement, cette méthode n'est en aucun cas plus longue, ou n'exige plus de calculs que n'importe quelle autre. L'usage judicieux des déterminants ne peut jamais apporter que des simplifications dans des calculs qui se laissent aussi exécuter, d'une manière très prolixe, par d'autres procédés. On évite ainsi l'introduction de facteurs qui plus tard doivent être de nouveau éliminés, et, en faisant une application intelligente des propriétés des déterminants, on peut arriver à abréger considérablement les calculs. En outre, aucune méthode n'offre autant de garanties contre l'introduction d'erreurs de calcul que celle des déterminants, parce que les résultats sont immédiatement écrits sous une forme symétrique et n'exigent que des substitutions régulières.

---

§ 2.

Si l'on a en général

$$X = f(x_1\, x_2\, \ldots\, x_n),$$

et que g soit le poids de x, le poids G de X est donné, d'après les principes du calcul des probabilités, par l'expression

$$\frac{1}{G} = \sum_1^n \frac{t^2}{g}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

dans laquelle $t = \dfrac{\delta X}{\delta x}$.

Pour appliquer ceci aux équations (4), qui expriment les x en F, nous devons commencer par chercher les quotients différentiels des x par rapport aux F. Des équations (4), combinées avec les éq. (5), on déduit :

$$\Delta dx_1 = \begin{vmatrix} (gadF)(gab)\,..\,(gap) \\ (gbdF)(gbb)\,..\,(gbp) \\ (gcdF)(gcb)\,..\,(gcp) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (gpdF)(gbp)\,..\,(gpp) \end{vmatrix}, \quad \Delta dx_n = \begin{vmatrix} (gaa)(gab)\,..\,(gadF) \\ (gba)(gbb)\,..\,(gbdF) \\ (gca)(gcb)\,..\,(gcdF) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (gpa)(gpb)\,..\,(gpdF) \end{vmatrix} \quad . \ (7)$$

En désignant, dans le déterminant principal Δ, par M_{ik} le *mineur* du terme $k^{ième}$ de la colonne $i^{ième}$, le développement des expressions ci-dessus donne:

$$\left.\begin{aligned} \Delta dx_1 &= (gadF)M_{11} + (gbdF)M_{12} + \dots (gpdF)M_{1n} = \\ &= (g_1a_1M_{11} + g_1b_1M_{12} + \dots g_1p_1M_{1n})dF_1 + \\ &+ (g_2a_2M_{11} + g_2b_2M_{12} + \dots g_2p_2M_{1n})dF_2 + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (g_ma_mM_{11} + g_mb_mM_{12} + \dots g_mp_mM_{1n})dF_m. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (8)$$

Posons en outre:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta x_1}{\delta F_1} = t_{11}, \quad \frac{\delta x_1}{\delta F_2} = t_{12}, \dots \frac{\delta x_1}{\delta F_m} = t_{1m}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\delta x_n}{\delta F_1} = t_{n1}, \quad \frac{\delta x_n}{\delta F_2} = t_{n2}, \dots \frac{\delta x_n}{\delta F_m} = t_{nm}; \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (9)$$

on aura alors, d'après (7) et (8):

$$\left.\begin{aligned} \Delta t_{11} &= g_1\,(a_1M_{11} + b_1M_{12} + \dots p_1M_{1n}), \\ \Delta t_{12} &= g_2\,(a_2M_{11} + b_2M_{12} + \dots p_2M_{1n}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta t_{1m} &= g_m\,(a_mM_{11} + b_mM_{12} + \dots p_mM_{1n}). \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (10)$$

Multipliant la première de ces équations par a_1, la seconde par a_2, etc., et additionnant, on obtient:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Sigma at_1 = (gaa)\,M_{11} + (gab)\,M_{12} + \dots (gap)\,M_{1n} = \Delta, \\ &\text{de même} \\ &\Delta\Sigma bt_1 = (gba)\,M_{11} + (gbb)\,M_{12} + \dots (gbp)\,M_{1n} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta\Sigma pt_1 = (gpa)\,M_{11} + (gpb)\,M_{12} + \dots (gpp)\,M_{1n} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \ (11)$$

La première forme donne Δ, parce qu'elle représente précisé-

ment le développement du déterminant suivant les termes de la première ligne; toutes les autres deviennent nulles, parce qu'elles donnent la valeur du même déterminant pour deux lignes égales.

De la même manière on déduira de (7):

$$\left.\begin{array}{l} \Delta t_{n1} = g_1\,(a_1 M_{n1} + b_1 M_{n2} + \ldots . p_1 M_{nn}), \\ \Delta t_{n2} = g_2\,(a_2 M_{n1} + b_2 M_{n2} + \ldots . p_2 M_{nn}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta t_{nm} = g_m\,(a_m M_{n1} + b_m M_{n2} + \ldots . p_m M_{nn}); \end{array}\right\} \quad . . (12)$$

équations qui donnent:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \Sigma a t_n = (gaa)\,M_{n1} + (gab)\,M_{n2} + \ldots\ (gap) M_{nn} = 0, \\ \Delta \Sigma b t_n = (gba)\,M_{n1} + (gbb)\,M_{n2} + \ldots\ (gbp)\,M_{nn} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta \Sigma p t_n = (gpa)\,M_{n1} + (qpb)\,M_{n2} + \ldots\ (gpp)\,M_{nn} = \Delta. \end{array}\right\} (13)$$

Les équations (11), (13) et les autres équations analogues conduisent ensuite à

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma a t_1 = 1,\ \ \Sigma b t_1 = 0,\ \ \Sigma c t_1 = 0, \ \ldots\ \Sigma p t_1 = 0, \\ \Sigma a t_2 = 0,\ \ \Sigma b t_2 = 1,\ \ \Sigma c t_2 = 0, \ \ldots\ \Sigma p t_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma a t_n = 0,\ \ \Sigma b t_n = 0,\ \ \Sigma c t_n = 0, \ \ldots\ \Sigma p t_n = 0, \end{array}\right\} \ . (14)$$

Reprenons maintenant les équations (10), multiplions la première par $\frac{t_{11}}{g_1}$, la seconde par $\frac{t_{12}}{g_2}$, etc., la dernière par $\frac{t_{1m}}{g_m}$, et faisons-en la somme; en ayant égard aux éq. (14), on trouve alors:

$$\Delta \Sigma \frac{t_1^{\,2}}{g} = M_{11} \Sigma a t_1 + M_{12} \Sigma b t_1 + \ldots + M_{1n} \Sigma p t_1 = M_{11};$$

de même, on tire de (12) et (14). (15)

$$\Delta \Sigma \frac{t_n^{\,2}}{g} = M_{n1}\,\Sigma a t_n + M_{n2}\,\Sigma b t_n + \ldots + M_{nn}\,\Sigma p t_n = M_{nn}.$$

Désignant enfin par G_1 le poids de x_1, par G_2 celui de x_2, etc., il résultera de (6), en combinaison avec (15):

$$\frac{\Delta}{G_1} = M_{11},\ \ \frac{\Delta}{G_2} = M_{22},\ \ \frac{\Delta}{G_3} = M_{33}, \ \ldots\ \frac{\Delta}{G_n} = M_{nn};$$

ou $$G_1 = \frac{\Delta}{M_{11}},\quad G_2 = \frac{\Delta}{M_{22}}, \ldots\; G_n = \frac{\Delta}{M_{nn}}; \ldots \quad (16)$$

équations qui déterminent les poids de toutes les grandeurs calculées.

On voit combien l'emploi des déterminants simplifie la détermination et surtout la représentation des *poids* des inconnues. Dans les équations (16), en effet, on a d'après (5):

$$\Delta = \begin{vmatrix} (gaa) & (gab) & \ldots & (gap) \\ (gba) & (gbb) & \ldots & (gbp) \\ (gca) & (gcb) & \ldots & (gcp) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (gpa) & (gpb) & \ldots & (gpp) \end{vmatrix},$$

et par conséquent:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & (gab) & \ldots & (gap) \\ (gba) & 0 & \ldots & (gbp) \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (gpa) & (gpb) & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & (gab) & \ldots & (gap) \\ (gba) & 1 & \ldots & (gbp) \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ (gpa) & gpb) & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

$$M_{nn} = \begin{vmatrix} 0 & (gab) & \ldots & (gap) \\ (gba) & 0 & \ldots & (gpb) \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (gpa) & (gpb) & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

La comparaison de ces résultats avec ceux qu'on obtient suivant la méthode de Gauss fait immédiatement ressortir la supériorité de la méthode nouvelle, tant par rapport à la forme que par rapport aux calculs. On reconnaît, en outre, que les poids des grandeurs calculées ne dépendent pas des grandeurs observées F, mais seulement des cœfficients constants et des poids des observations. Lorsque celles-ci ont des poids égaux, la chose se simplifie un peu. On obtient alors pour les équations normales :

$$\begin{aligned} (aa)\,x_1 + (ab)\,x_2 + \ldots\ldots (ap)\,x_n &= (aF), \\ (ba)\,x_1 + (bb)\,x_2 + \ldots\ldots (bp)\,x_n &= (bF), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (pa)\,x_1 + (pb)\,x_2 + \ldots\ldots (pp)\,x_n &= (pF), \end{aligned}$$

de sorte qu'on a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & \cdot\cdot & (ap) \\ (ba) & (bb) & \cdot\cdot & (bp) \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (pa) & (pb) & \cdot\cdot & (pp) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & \cdot\cdot & (aF) \\ (ba) & (bb) & \cdot\cdot & (bF) \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (pa) & (pb) & \cdot\cdot & (pF) \end{vmatrix}.$$

De même, on obient dans ce cas:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & (ab) & \cdot\cdot & (ap) \\ (ba) & 0 & \cdot\cdot & (bp) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (pa) & (pb) & \cdot\cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}, \qquad M_{nn} = \begin{vmatrix} 0 & (ab) & \cdot\cdot & (ap) \\ (ba) & 0 & \cdot\cdot & (bp) \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (pa) & (pb) & \cdot\cdot\cdot & 1 \end{vmatrix},$$

valeurs d'où, par substitution dans (4) et dans (16), se déduisent immédiatement tant les inconnues que leurs poids.

---

§ 3.

Si l'on a déterminé aussi exactement que possible par l'observation n grandeurs $x_1, x_2 \ldots x_n$, qui doivent d'ailleurs satisfaire rigoureusement à m relations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \\ f_2(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

où $m < n$, on reconnaîtra, après substitution, que les grandeurs mesurées ne s'accordent pas exactement avec ces équations, et qu'elles doivent encore subir, pour y satisfaire, certaines corrections. Il s'agit maintenant de savoir comment ces corrections peuvent être déterminées.

Supposons que les grandeurs observées soient $X_1, X_2 \ldots X_n$, et les corrections cherchées $y_1, y_2 \ldots y_n$, on aura,

$$x_1 = X_1 + y_1, x_2 = X_2 + y_2, x_3 = X_3 + y_3, \ldots x_n = X_n + y_n,$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X_1+y_1, \quad X_2+y_2 \ldots X_n+y_n)=0, \\ f_1(X_2+y_1, \quad X_2+y_2 \ldots X_n+y_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(X_1+y_1, \quad X_2+y_2 \ldots X_n+y_n)=0, \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Les observations doivent être assez exactes pour que les corrections puissent être supposées si petites, que les puissances deuxième et supérieures soient négligeables. Par le développement suivant le théorème de Taylor, les équations (2) donnent alors:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X_1X_2 \ldots X_n)+\frac{\delta f_1}{\delta X_1}y_1+\frac{\delta f_1}{\delta X_2}y_2+\ldots\frac{\delta f_1}{\delta X_n}y_n=0, \\ f_2(X_1X_2 \ldots X_n)+\frac{\delta f_2}{\delta X_1}y_1+\frac{\delta f_2}{\delta X_2}y_2+\ldots\frac{\delta f_2}{\delta X_n}y_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(X_1X_2 \ldots X_n)+\frac{\delta f_m}{\delta X_1}y_1+\frac{\delta f_m}{\delta X_2}y_2+\ldots\frac{\delta f_m}{\delta X_n}y_n=0, \end{array}\right\} (3)$$

Si dans ces équations on pose:

$$f(X_1X_2..X_n)=-A_1, f_2(X_1X_2..X_n)=-A_2, .. f_m(X_1X_2..X_n)=-A_m,$$

$$\begin{array}{lll} \frac{\delta f_1}{\delta X_1}=a_1, & \frac{\delta f_2}{\delta X_2}=a_2 \ldots & \frac{\delta f_1}{\delta X_n}=a_n, \\ \frac{\delta f_2}{\delta X_1}=b_1, & \frac{\delta f_2}{\delta X_2}=b_2 \ldots & \frac{\delta f_2}{\delta X_n}=b_n, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\delta f_m}{\delta X_1}=p_1, & \frac{\delta f_m}{\delta X_2}=p_2 \ldots & \frac{\delta f_m}{\delta X_n}=p_n; \end{array}$$

toutes ces grandeurs peuvent être calculées d'avance, et le système (3) se change en celui-ci:

$$\left.\begin{array}{l} a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3 \ldots +a_ny_n=A_1, \\ b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3 \ldots +b_ny_n=A_2, \\ c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3 \ldots +c_ny_n=A_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3 \ldots +p_ny_n=A_m; \end{array}\right\} \ldots (4)$$

c'est-à-dire en un système de m équations linéaires à n inconnues, lesquelles inconnues doivent satisfaire en outre à la condition

$$g_1 y_1^2 + g_2 y_2^2 + g_3 y_3^2 + \ldots . g_n y_n^2 = \text{Mininum} \ldots \quad (5)$$

où g représente le poids des grandeurs mesurées X correspondantes.

Pour déterminer maintenant les valeurs de y, de manière à ce qu'elles satisfassent rigoureusement aux équations (4) et (5), nous différentions les deux systèmes ; on trouve ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} g_1 y_1 dy_1 + g_2 y_2 dy_2 + g_3 y_3 dy_3 + \ldots + g_n y_n dy_n = 0, \\ a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + \ldots + a_n dy_n = 0, \\ b_1 dy_1 + b_2 dy_2 + b_3 dy_3 + \ldots + b_n dy_n = 0, \\ c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_3 dy_3 + \ldots + c_n dy_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 dy_1 + p_2 dy_2 + p_3 dy_3 + \ldots + p_n dy_n = 0. \end{array}\right\} \ldots (6)$$

Entre les n différentielles existent alors ces $(m + 1)$ relations ; il reste donc $n - m$ conditions entre les coefficients, c'est-à-dire, entre les valeurs de y et les grandeurs connues g, a, b, c, ... p. Ces $n - m$ relations, combinées avec les m équations (4), forment ensemble n équations à n inconnues, lesquelles inconnues sont ainsi entièrement déterminées.

L'opération s'exécute ordinairement en introduisant des coefficients indéterminés. Pour cela, on multiplie dans le système (6) la seconde équation par un facteur k_1, la troisième par k_2, la dernière par k_m ; on peut alors poser :

$$\left.\begin{array}{l} g_1 y_1 = k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + \ldots . k_m p_1, \\ g_2 y_2 = k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 + \ldots . k_m p_2, \\ g_3 y_3 = k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 + \ldots . k_m p_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n y_n = k_1 a_n + k_2 b_n + k_3 c_n + \ldots . k_m p_n. \end{array}\right\} \ldots (7)$$

Dans les systèmes (4) et (7) on a maintenant $m + n$ équations linéaires à $m + n$ inconnues (y et k), qui par-là sont entièrement déterminées. La solution se fait de la manière la plus simple en transportant dans (4) les valeurs de y tirées de (7) ; on obtient ainsi, suivant la notation habituelle :

$$\left.\begin{array}{l}
k_1\left(\frac{aa}{g}\right)+k_2\left(\frac{ab}{g}\right)+k_3\left(\frac{ac}{g}\right)+\ldots\; k_m\left(\frac{ap}{g}\right)=A_1\,,\\
k_1\left(\frac{ba}{g}\right)+k_2\left(\frac{bb}{g}\right)+k_3\left(\frac{bc}{g}\right)+\ldots\; k_m\left(\frac{bp}{g}\right)=A_2\,,\\
k_1\left(\frac{ca}{g}\right)+k_2\left(\frac{cb}{g}\right)+k_3\left(\frac{cc}{g}\right)+\ldots\; k_m\left(\frac{cp}{g}\right)=A_3\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_1\left(\frac{pa}{g}\right)+k_2\left(\frac{pb}{g}\right)+k_3\left(\frac{pc}{g}\right)+\ldots\; k_m\left(\frac{pp}{g}\right)=A_m.
\end{array}\right\} \ldots 8)$$

Ce système de m équations linéaires donne pour les valeurs de k:

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta=\begin{vmatrix}
\left(\frac{aa}{g}\right) & \left(\frac{ab}{g}\right) & \left(\frac{ac}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{ap}{g}\right)\\
\left(\frac{ba}{g}\right) & \left(\frac{bb}{g}\right) & \left(\frac{bc}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{bp}{g}\right)\\
\left(\frac{ca}{g}\right) & \left(\frac{cb}{g}\right) & \left(\frac{cc}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{cp}{g}\right)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\left(\frac{pa}{g}\right) & \left(\frac{pb}{g}\right) & \left(\frac{pc}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{pp}{g}\right)
\end{vmatrix},\; k_1\Delta=\begin{vmatrix}
A_1 & \left(\frac{ab}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{ap}{g}\right)\\
A_1 & \left(\frac{bb}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{bp}{g}\right)\\
A_3 & \left(\frac{cb}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{cp}{g}\right)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
A_m & \left(\frac{pb}{g}\right) & \ldots & \left(\frac{pp}{g}\right)
\end{vmatrix},\\[2em]
k_m\,\Delta=\begin{vmatrix}
\left(\frac{aa}{g}\right) & \ldots & A_1\\
\left(\frac{ba}{g}\right) & \ldots & A_2\\
\left(\frac{ca}{g}\right) & \ldots & A_3\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\left(\frac{pa}{g}\right) & \ldots & A_m
\end{vmatrix}.
\end{array}\right\}\ldots (9)$$

En substituant ces valeurs de k dans le système (7), on obtient les valeurs de y ainsi qu'il suit:

$$\Delta g_1 y_1 = a_1 \begin{vmatrix} A_1 & \left(\frac{ab}{g}\right) & \left(\frac{ac}{g}\right) & \cdots & \left(\frac{ap}{g}\right) \\ A_2 & \left(\frac{bb}{g}\right) & \left(\frac{bc}{g}\right) & \cdots & \left(\frac{bp}{g}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m & \left(\frac{pb}{g}\right) & \left(\frac{pc}{g}\right) & \cdots & \left(\frac{pp}{g}\right) \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} \left(\frac{aa}{g}\right) & A_1 & \left(\frac{ac}{g}\right) & \cdots & \left(\frac{ap}{g}\right) \\ \left(\frac{ba}{g}\right) & A_2 & \left(\frac{bc}{g}\right) & \cdots & \left(\frac{bp}{g}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{pa}{g}\right) & A_m & \left(\frac{pc}{g}\right) & \cdots & \left(\frac{pp}{g}\right) \end{vmatrix} +$$

$$\cdots + p_1 \begin{vmatrix} \left(\frac{aa}{g}\right) & \left(\frac{ab}{g}\right) & \cdots & A_1, \\ \left(\frac{ba}{g}\right) & \left(\frac{bb}{g}\right) & \cdots & A_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{pa}{g}\right) & \left(\frac{pb}{g}\right) & \cdots & A_m. \end{vmatrix},$$

$$\Delta g_2 y_2 = a_2 \begin{vmatrix} A_1 & \cdots & \left(\frac{ap}{g}\right) \\ A_2 & \cdots & \left(\frac{bp}{g}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m & \cdots & \left(\frac{pp}{g}\right) \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} \left(\frac{aa}{g}\right) & A_1 & \cdots & \left(\frac{ap}{g}\right) \\ \left(\frac{ba}{g}\right) & A_2 & \cdots & \left(\frac{bp}{g}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{pa}{g}\right) & A_m & \cdots & \left(\frac{pp}{g}\right) \end{vmatrix} \cdots + p_2 \begin{vmatrix} \left(\frac{aa}{g}\right) & \cdots & A_1 \\ \left(\frac{ba}{g}\right) & \cdots & A_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{pa}{g}\right) & \cdots & A_m \end{vmatrix},$$

. . . .

$$\Delta g_n y_n = a_n \begin{vmatrix} A_1 & \cdots & \left(\frac{ap}{g}\right) \\ A_2 & \cdots & \left(\frac{bp}{g}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m & \cdots & \left(\frac{pp}{g}\right) \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} \left(\frac{aa}{g}\right) & A_1 & \cdots & \left(\frac{ap}{g}\right) \\ \left(\frac{ba}{g}\right) & A_2 & \cdots & \left(\frac{bp}{g}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{pa}{g}\right) & A_m & \cdots & \left(\frac{pp}{g}\right) \end{vmatrix} \cdots + p_n \begin{vmatrix} \left(\frac{aa}{g}\right) & \cdots & A_1 \\ \left(\frac{ba}{g}\right) & \cdots & A_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{pa}{g}\right) & \cdots & A_m \end{vmatrix}.$$

Les valeurs de y sont alors complétement déterminées, et par leur substitution dans

$$x_1 = X_1 + y_1, \quad X_2 = X_2 + y_2, \ldots \quad x_n = X_n + y_n,$$

le problème se trouve résolu. Aucune autre méthode ne donne,

comme celle-ci, les valeurs des corrections exprimées directement en fonction des grandeurs connues.

Toutefois, en faisant usage de propriétés supérieures des déterminants, on peut encore abréger les opérations et éviter entièrement l'introduction de facteurs indéterminés.

L'élimination des différentielles de (6) et les relations qui en résultent entre les coefficients peuvent être représentées directement sous la forme:

$$\left\| \begin{matrix} g_1 y_1, & g_2 y_2, & g_3 y_3 \dots & g_n y_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 \dots & p_n \end{matrix} \right\| = 0 \dots (10)$$

Le déterminant spécial du premier membre contient n colonnes et $m + 1$ lignes, n étant $> m$; il représente tous les déterminants ordinaires, qui s'en déduisent en combinant chaque système de $m + 1$ colonnes avec les lignes correspondantes; le double signe d'égalité devant le zéro veut dire que tous ces déterminants sont nuls, de sorte que l'équation (10) contient en réalité $n - m$ équations indépendantes, linéaires par rapport aux inconnues y. Ces $n - m$ équations, combinées avec le système (4), donnent ensemble n équations linéaires à n inconnues, lesquelles inconnues sont ainsi entièrement déterminées. L'équation symbolique (10), jointe au système (4), renferme par conséquent la solution complète du problème proposé.

SUR LE CALCUL

DE LA

DISTANCE MOYENNE DE CHOC DES MOLÉCULES GAZEUSES,

DANS LE CAS OÙ L'ON TIENT COMPTE DE TOUTES LEURS DIMENSIONS;

PAR

D. J. KORTEWEG.

---

1. La distance moyenne de choc des molécules a été calculée par M. Clausius [1]) dans l'hypothèse suivante:

1° que le mouvement des molécules ait lieu également dans toutes les directions;

2° que les dimensions des molécules soient petites en comparaison de leurs distances mutuelles;

3° que leurs vitesses soient égales entre elles.

Dans ce calcul, de même que dans celui de M. Maxwell, il a bien été tenu compte, ainsi que M. van der Waals le fait remarquer dans sa dissertation inaugurale „*Over de continuïteit van den gas- en vloeistoftoestand*", des dimensions des molécules *perpendiculaires* à la direction de leur mouvement relatif, mais non des dimensions *parallèles* à cette direction.

Nous voulons essayer ici de traiter la question en renonçant

---

1) Pogg. *Annal.*, t. C, p. 353.

à la troisième des conditions restrictives ci-dessus énoncées et en regardant, en outre, les molécules comme des sphères.

2. Si les différentes molécules possèdent des vitesses différentes, le nombre de celles qui, dans l'unité de volume, ont des vitesses plus petites qu'une vitesse donnée v, est une fonction de cette vitesse v. Cette fonction étant représentée par U_v, le nombre total des molécules contenues dans l'unité de volume sera indiqué par U_∞. Au lieu de U_∞, toutefois, nous écrirons U.

Le nombre des molécules dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ sera:

$$U_{v+dv} - U_v = dU_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Supposons maintenant un système d'axes perpendiculaires fixes, et soit ε l'angle que la vitesse d'une molécule fait avec la partie négative de l'axe X; le nombre des molécules pour lesquelles cet angle est compris entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, et dont, en outre, la vitesse est intermédiaire entre v et $v + dv$, sera donné par:

$$\frac{\sin\varepsilon \,.\, dU_v \,.\, d\varepsilon}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Figurons-nous, en effet, toutes les molécules dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ transportées en un seul point de l'espace, sans altération de la grandeur ni de la direction de leurs vitesses, et décrivons autour de ce point une sphère ayant l'unité pour rayon; par chaque point de la surface de cette sphère sortira alors, suivant la première supposition du § 1, un même nombre de molécules, donc par unité de surface:

$$\frac{dU_v}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Mais toutes les molécules, dont les directions de mouvement font avec l'axe X des angles compris entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, quittent la sphère dans les points d'une zone qui a pour hauteur

$$\sin\varepsilon \,.\, d\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

et par conséquent pour surface

$$2\pi \sin\varepsilon \,.\, d\varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Leur nombre est donc bien conforme à ce qu'indique la formule (2).

Menons enfin par l'axe X un plan parallèle à la direction du mouvement de la molécule, et soit ψ l'angle que ce plan fait avec le plan XOZ; il est clair que le nombre des molécules qui, outre les deux conditions précédentes, satisfont encore à celle-ci, que l'angle en question soit compris entre ψ et $\psi + d\psi$, sera représenté par

$$\frac{\sin \varepsilon \,.\, dU_v \,.\, d\varepsilon \,.\, d\psi}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

A un pareil assemblage de molécules, ayant des vitesses égales, à la différentielle première près, en grandeur et en direction, nous donnerons le nom de système (v, ε, ψ).

3. Considérons maintenant une molécule M, se mouvant avec la vitesse c dans une direction quelconque, et cherchons la probabilité que cette molécule vienne à en rencontrer une autre dans le petit intervalle de temps dt. Il est clair, — en vertu de la première supposition du § 1, — que nous pouvons faire coïncider la direction de son mouvement avec l'axe X, sans que la probabilité demandée s'en trouve atteinte. Il est également clair que nous pouvons réduire la molécule M à un simple point, *pourvu* que nous attribuions à toutes les autres molécules un rayon double; c'est-à-dire que, si ϱ représentait primitivement leur diamètre, il faudra maintenant leur donner ϱ pour rayon. Un choc se produira, en effet, dès que le centre M de la molécule en question arrivera en contact avec la surface d'une de ces sphères agrandies. Nous pouvons aussi supposer le point M en repos, à condition de substituer au mouvement absolu des autres molécules leur mouvement relatif par rapport à M. Enfin, nous introduirons une supposition dont l'inexactitude est manifeste, et sur laquelle nous aurons par conséquent à revenir: nous remplacerons les molécules sphériques par des disques de même rayon, dont le plan soit perpendiculaire à la direction de leur mouvement relatif par rapport à M.

Ces préliminaires établis, nous devons, pour calculer la probabilité en question, commencer par distinguer les différents systèmes et chercher quelle est la probabilité d'un choc avec le système (v, ε, ψ) pendant le temps dt.

A cet effet, remarquons que les molécules de ce système possèdent la vitesse relative

$$\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

En menant donc par le centre M un plan perpendiculaire à la direction de ce mouvement relatif, c'est-à-dire parallèle aux disques des molécules de ce système, il passera par l'unité de surface de ce plan, dans le temps dt, autant de molécules qu'en contient un cylindre ayant pour base cette unité de surface et pour hauteur

$$\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}\,.\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Le nombre de ces molécules sera donc, à raison de l'éq. (6):

$$\frac{\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}\,.\,\sin\varepsilon\,.\,dU_v\,.\,d\varepsilon\,.\,d\psi\,.\,dt}{4\pi}; \quad \ldots \quad (9)$$

par ce même plan passeront d'ailleurs aussi des molécules d'autres systèmes.

Si le temps dt est pris suffisamment court, on pourra admettre — eu égard à la seconde supposition du § 1 — que les traces laissées par le passage des molécules à travers le plan, les trous qu'elles y font en quelque sorte, ne se recouvrent nulle part. Dans ce cas, les molécules du système (v, ε, ψ) emportent une partie de ce plan qui a pour surface

$$\frac{\varrho^2\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}\,.\,\sin\varepsilon\,.\,dU_v\,.\,d\varepsilon\,.\,d\psi\,.\,dt}{4}, \quad . \quad (10)$$

et la probabilité que le point M se trouve sur une semblable partie, et que par conséquent il y ait choc, est donnée par cette même formule (10).

4. Pour connaître la probabilité totale d'un choc, il reste à sommer l'expression précédente pour tous les systèmes, c'est-à-dire

à l'intégrer par rapport à ψ, ε et v. En représentant cette probabilité par

$$\alpha_c \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

on a donc:

$$\alpha_c = \tfrac{1}{4}\,\varrho^2 \int_{v=0}^{v=\infty} d\,U_v \int_0^{\pi} d\varepsilon \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 + c^2 + 2\,vc\cos\varepsilon}\,.\,\sin\varepsilon\,.\,d\psi\,. \quad (12)$$

La première de ces intégrations se laisse facilement exécuter, et l'on trouve:

$$\alpha_c = \frac{1}{2}\,\varrho^2\,\pi \int_{v=0}^{v=\infty} d\,U_v \int_0^{\pi} \sqrt{v^2 + c^2 + 2\,vc\cos\varepsilon}\,.\,\sin\varepsilon\,.\,d\varepsilon\,. \quad (13)$$

La seconde est également praticable, car l'on a:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{v^2 + c^2 + 2\,vc\cos\varepsilon}\,.\,\sin\varepsilon\,.\,d\varepsilon = \frac{1}{3\,vc}\left\{(c+v)^3 \pm (c-v)^3\right\} \quad (14)$$

résultat où l'on doit prendre un signe différent suivant qu'on a $v \gtrless c$.

Cette circonstance oblige à effectuer l'intégration par rapport à v en deux temps, de cette manière [1]):

$$\alpha_c = \frac{1}{3}\,\varrho^2\pi\left[\int_{v=0}^{v=c}\left(3c + \frac{v^2}{c}\right) d\,U_v + \int_{v=c}^{v=\infty}\left(3v + \frac{c^2}{v}\right) d\,U_v\right]. \quad (15)$$

---

[1]) Si l'on suppose que toutes les molécules possèdent une même vitesse c, on a $d\,U_v = U$ et l'on trouve:

$$\alpha_c = \frac{4}{3}\,\varrho^2 . c . \pi . U.$$

En admettant, au contraire, que les molécules sont en repos, sauf la molécule M, on a $v = 0$ et $d\,U_v = U$; on trouve alors:

$$\alpha_c = \varrho^2 . c . \pi . U.$$

Ces deux résultats sont entre eux dans le rapport $\frac{4}{3} : 1$, valeur qui est donnée aussi par M. Clausius.

5. Comme la probabilité d'un choc dans le temps dt est, d'après (11), égale à $\alpha_c . dt$, la probabilité qu'il n'y aura pas de choc est représentée par:

$$1 - \alpha_c \, . \, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

mais — attendu que dt est infiniment petit — on peut, au lieu de cette expression, écrire sans la moindre erreur:

$$e^{-\alpha_c . dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Il s'ensuit immédiatement, d'après les lois de la probabilité composée, que la probabilité qu'*aucun* choc n'aura lieu dans le temps

$$t = n\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

est exprimée tout à fait exactement par:

$$\left(e^{-\alpha_c . dt}\right)^n = e^{-\alpha_c . t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

6. Si maintenant

$$P = dU_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

représente le nombre des molécules qui, dans l'unité de volume, se meuvent à un moment donné avec une vitesse comprise entre v et $v + dv$, il y en aura, durant le temps t, un nombre

$$P \, . \, e^{-\alpha_c . t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

qui ne subiront pas de choc. Durant le temps $t + dt$, au contraire, il n'y aura que

$$P \, . \, e^{-\alpha_c (t + dt)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

molécules restant à l'abri du choc, de sorte que, dans le petit temps dt, il y aura

$$P \,.\, e^{-\alpha_c . t}\left(1 - e^{-\alpha_c . dt}\right) = P \,.\, \alpha_c \,.\, e^{-\alpha_c . t} \,.\, dt \quad . \;. \;(23)$$

molécules participant au choc. Chacune de celles-ci parcourt d'ailleurs — par rapport au système d'axes fixes — dans le temps t un chemin ct; la somme de tous ces chemins est donc:

$$P \,.\, c \,.\, \alpha_c \,.\, e^{-\alpha_c . t} \,.\, t \,.\, dt \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(24)$$

7. Mais le moment est maintenant venu d'écarter la supposition inexacte introduite au § 3 et de remplacer de nouveau les disques par des sphères. Cette substitution n'aura pas pour effet de changer la nature des chocs, car une molécule M, qui sur son trajet aurait rencontré quelque disque, atteindra immanquablement, avant ce moment, la surface de la sphère par laquelle nous l'avons remplacé. Toutes les molécules M entreront donc en collision avec les mêmes molécules dont nous avions supposé que les disques étaient traversés par les centres de ces molécules M; mais tous ces chocs se produiront un peu plus tôt, c'est-à-dire que les chemins seront raccourcis. Si nous admettons que le point M est atteint par la surface sphérique au moment où le disque en était encore éloigné de la distance y, le chemin parcouru — *relativement à M regardé comme point fixe* — par la molécule à laquelle cette surface appartient, sera raccourci de la quantité y. Or, d'après la form. (7), la vitesse de ce mouvement relatif est

$$\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}\,;$$

le temps t, qui s'écoule jusqu'au choc, sera donc abrégé de

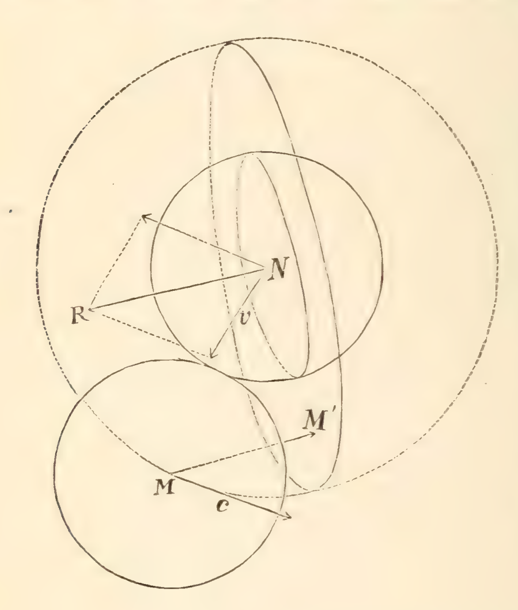
$$\frac{y}{\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(25)$$

tandis que le chemin ct, qui en ce temps est parcouru par la molécule M, sera raccourci de [1]):

$$\frac{yc}{\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Ce résultat s'applique à tous les chocs qui intéressent le système (v, ε, ψ); mais, comme les molécules dont il est question dans

[1]) La proposition que le chemin, qui serait parcouru par la molécule M si les sphères étaient remplacées par des disques, doit être raccourci de la quantité (26), se déduit aussi de la considération de la figure ci-contre. M étant la molécule qui se meut avec la vitesse c, N celle qui se meut avec la vitesse v, construisons la vitesse relative N R de N par rapport à M. Plaçons perpendiculairement à N R le plan du disque qui remplacera la molécule N. La perpendiculaire M M′ abaissée, au moment du choc, de M sur le plan du disque, représente alors y.



En observant maintenant que ce disque se meut par rapport a M dans une direction parallèle à MM′, avec une vitesse

$$NR = \sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}$$

on voit immédiatement que le choc du point M avec le disque exige, comparativement au choc des deux sphères, un petit excès de temps égal à:

$$\frac{y}{\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}},$$

Or, dans ce court intervalle de temps, M parcourrait, relativement au système d'axes fixes, un chemin

$$\frac{yc}{\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}},$$

et c'est donc de cette quantité que doit être raccourci le chemin ct.

la formule (24) entrent en collision avec tous les systèmes, il faut avant tout chercher combien de ces collisions doivent être attribuées à chacun de ces systèmes.

Pour cela, nous n'avons qu'à nous reporter à la formule (10), qui indique la probabilité du choc dans le petit intervalle de temps dt avec le système (v, ε, ψ), et à remarquer qu'à la fin des t secondes il y a encore, — conformément à la formule (21), —

$$\mathrm{P} \,.\, e^{-\alpha_c . t}$$

molécules qui n'ont pas subi de choc. De celles-ci, il y en aura donc, dans le court intervalle de temps dt,

$$\frac{\varrho^2 \,.\, \mathrm{P} \,.\, e^{-\alpha_c . t} \,.\, \sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon} \,.\, \sin\varepsilon \,.\, d\mathrm{U}_v \,.\, d\varepsilon \,.\, d\psi \,.\, dt}{4} \,. \quad (27)$$

qui entreront en collision avec le système (v, ε, ψ).

8. Il faut maintenant sommer l'expression (26) pour toutes ces molécules, afin d'avoir, en ce qui les concerne, la somme des corrections qui doivent être apportées à la formule (24). Cette somme est

$$\frac{c}{\sqrt{v^2 + c^2 + 2vc\cos\varepsilon}} \Sigma y \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (28)$$

expression dans laquelle il est permis de prendre pour Σy la valeur moyenne de y multipliée par le nombre de termes, qui est indiqué par (27). Or, des portions égales de la surface du disque hypothétique devant évidemment être traversées par un même nombre de points M, cette valeur moyenne sera égale à

$$\frac{\int y \,.\, d\mathrm{O}}{\mathrm{O}}$$

où O désigne la surface du disque primitivement considéré.

En introduisant maintenant l'angle φ qu'un rayon de la sphère fait avec la normale au disque, et regardant cet angle comme une variable indépendante, on a:

$$d\mathrm{O} = 2\pi\varrho\sin\varphi \,.\, d\varrho\sin\varphi$$

et

$$y = \varrho \cos \varphi ,$$

par conséquent:

$$\frac{\int y \, d O}{O} = - \frac{2 \pi \varrho^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi \, . \, d \, . \, \cos \varphi}{\varrho^2 \pi} = \frac{2}{3} \varrho \, . \, . \, . \, . \quad (29)$$

A l'aide de cette distance moyenne, on trouve pour la somme de toutes les corrections qui doivent être faites par rapport aux chocs avec le système (v, ε, ψ):

$$\frac{1}{6} \varrho^3 \, . \, \mathrm{P} \, . \, e^{-\alpha_c . t} \, . \, c \, . \sin \varepsilon \, . \, d \mathrm{U}_v \, . \, d \varepsilon \, . \, d \psi \, . \, dt \, . \, . \, . \, . \quad (30)$$

Etendue à tous les systèmes, cette somme est donc:

$$\frac{1}{6} \int_{v=0}^{v=\infty} d \, . \, \mathrm{U}_v \int_0^{\pi} d \varepsilon \int_0^{2\pi} \varrho^3 \, . \, \mathrm{P} \, . \, e^{-\alpha_c t} \, . \, c \, . \sin \varepsilon \, . \, d \psi \, dt \, . \, . \, . \quad (31)$$

Toutes ces intégrations successives se laissent exécuter; on remarquera que

$$\int_{v=0}^{v=\infty} d \, . \, \mathrm{U}_v = \mathrm{U} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (32)$$

Le résultat final de l'opération est

$$\frac{2}{3} \varrho^3 \, . \, \pi \, . \, \mathrm{P} \, . \, c \, . \, \mathrm{U} \, . \, e^{-\alpha_c t} \, . \, dt \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (33)$$

de sorte que, pour la somme des chemins mentionnée au § 6 et indiquée par la formule (24), on doit porter en compte, toute correction faite:

$$\mathrm{P} \, . \, c \, . \, \alpha_c \, . \, e^{-\alpha_c t} \, . \, t \, dt - \frac{2}{3} \varrho^3 \pi \, . \, \mathrm{P} \, . \, c \, . \, \mathrm{U} \, . \, e^{-\alpha_c t} \, . \, dt \, . \, . \quad (34)$$

9. Sommons enfin cette expression par rapport à t depuis *zéro* jusqu'à l'*infini*; nous trouvons alors pour la somme de *tous* les chemins parcourus, — à partir d'un instant donné jusqu'au premier choc, — par les P molécules qui possèdent la vitesse c:

$$\frac{Pc}{\alpha_c} - \frac{2}{3}\varrho^3 \pi . \frac{Pc}{\alpha_c} . U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

ou plutôt:

$$\frac{Pc}{\alpha_c}\left(1 - \frac{2}{3}\varrho^3 . \pi . U\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Introduisons encore le volume A occupé par l'*ensemble* des molécules qui se trouvent dans l'unité de volume; on a:

$$A = \frac{1}{6}\varrho^3 . \pi . U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

de sorte que pour l'expression (36) on peut écrire:

$$\frac{Pc}{\alpha c}(1 - 4A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

ou finalement, en vertu de (20):

$$\frac{c}{\alpha_c}(1 - 4A) . dU_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Telle est la somme de *tous* les chemins parcourus par les molécules qui possèdent les vitesses c. Si l'on veut connaître cette somme pour *toutes* les molécules, on doit encore intégrer par rapport à c depuis $c = 0$ jusqu'à $c = \infty$. Cette somme totale est donc:

$$(1 - 4A)\int_0^\infty \frac{c . dU_c}{\alpha_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Elle s'étend à toutes les molécules qui se trouvent dans l'unité de volume. Le chemin moyen est par conséquent:

$$\frac{1 - 4A}{U}\int_0^\infty \frac{c . dU_c}{\alpha_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

10. Mais ce n'est encore là que la moyenne du chemin parcouru par chaque molécule depuis un instant donné jusqu'au premier choc. La moyenne du chemin parcouru depuis le dernier choc jusqu'à l'instant donné a évidemment la même valeur. Ce

chemin moyen s'obtiendrait, en effet, par l'inversion subite de la vitesse de toutes les molécules; mais, puisque dans chaque direction se meuvent un même nombre de molécules, il ne résultérait de cette inversion aucun changement dans l'état de mouvement.

La distance moyenne de choc, que nous nous sommes proposé de trouver, est donc représentée par la formule:

$$\frac{2(1-4A)}{U}\int_0^\infty \frac{c\,.\,dU_c}{\alpha_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

dans laquelle α_c est déterminé, conformément à (15), par:

$$\alpha_c = \frac{1}{3}\rho^2\pi\left[\int_0^c\left(3c+\frac{v^2}{c}\right)dU_v + \int_c^\infty\left(3v+\frac{c^2}{v}\right)dU_v\right]. \quad (II)$$

De cette formule on tire la conséquence suivante:

Pour tenir compte de la dimension des molécules suivant la direction de leur mouvement relatif, on doit multiplier la distance de choc — trouvée en négligeant cette dimension — par l'unité diminuée de quatre fois le volume de toutes les molécules contenues dans l'unité de volume.

Ce facteur est donc constant, de quelque manière que les différentes vitesses soient distribuées sur les molécules, et quelle que soit la vitesse moyenne. Il ne peut dépendre de la température qu'en tant que celle-ci influe peut-être sur le volume des molécules.

11. Si nous voulons, en outre, avoir quelque idée de la grandeur de cette distance moyenne, nous pouvons, à l'exemple de M. Clausius, exécuter le calcul indiqué par les formules (I) et (II) pour le cas particulier où toutes les molécules se meuvent avec la même vitesse. Nous aurons alors à faire $v = c$, et, par suite, à changer les diverses intégrations en sommations, les deux intégrations de la formule (II) étant, bien entendu, remplacées par une sommation unique. On trouve ainsi:

$$\alpha_c = \frac{4}{3} c U \varrho^3 \pi \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

et par conséquent pour la distance moyenne de choc:

$$\frac{\frac{3}{2}(1 - 4A)}{U \varrho^2 \pi} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

En introduisant dans cette expression la distance λ, à laquelle les molécules se trouveraient l'une de l'autre en cas de disposition cubique, de sorte qu'on aurait

$$U = \lambda^3, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

on trouve:

$$\frac{3}{2}(1 - 4A) \frac{\lambda^3}{\varrho^2 \pi} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

résultat conforme à la formule du § 35 de la dissertation déjà citée de M. van der Waals, *sauf* que celle-ci donne la distance moyenne de choc *après* un instant donné, distance qui n'est que la moitié de celle considérée par nous.

12. En ce qui regarde le cas plus général où les molécules ne sont pas des sphères, il est clair que la distance moyenne de choc est alors différente. Pour un volume donné, en effet, la sphère présente évidemment la plus petite probabilité de choc. Si donc, dans l'unité de volume, le nombre des molécules et la somme de leurs volumes restent constants, la supposition d'une forme autre que la forme sphérique aura pour effet de raccourcir davantage la distance moyenne de choc. Le coefficient

$$1 - 4A \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

par lequel on doit multiplier pour tenir compte des dimensions suivant la direction du mouvement, conservera d'ailleurs la même forme; seul le facteur 4 y changera, parce que la distance moyenne y, tout en étant constante pour tous les systèmes de molécules, n'aura plus la même valeur que dans le cas de la forme sphérique. Dans sa partie essentielle, toutefois, la proposition formulée à la fin du § 10 restera vraie.

Breda, 11 Novembre 1875.

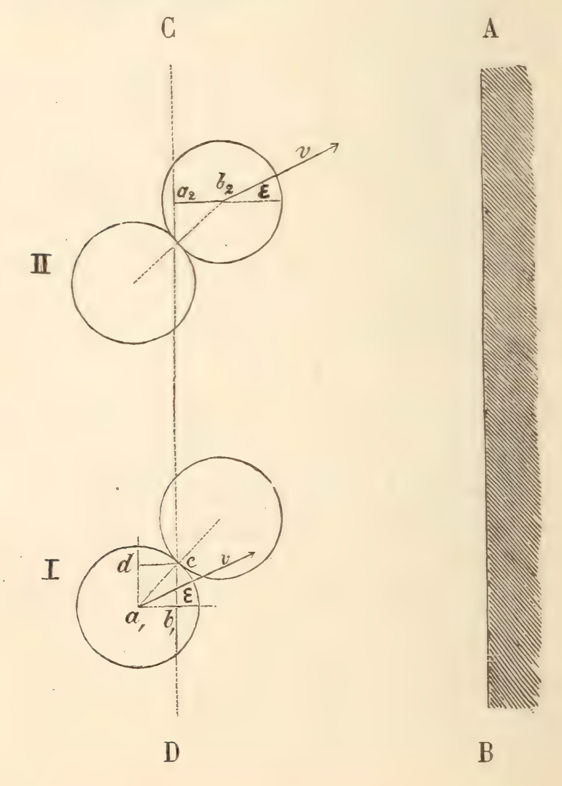
CALCUL DE L'ACCROISSEMENT DE TENSION

QU'UN GAZ ÉPROUVE PAR SUITE DU CHOC DES MOLÉCULES,

PAR

D. J. KORTEWEG.

1. De la diminution de la distance de choc il est peut-être permis de conclure immédiatement, ainsi que l'a fait M. van der Waals, à l'accroissement de la tension, en regardant ces deux grandeurs comme inversement proportionnelles l'une à l'autre. Néanmoins, il ne sera pas inutile d'essayer d'établir cet accroissement de la tension d'une manière indépendante de la détermination de la distance de choc.



Soit à cet effet, dans la figure ci-jointe, AB la paroi sur laquelle viennent rebondir les molécules. A chaque choc entre deux molécules, on pourra mener par le point de contact commun un plan CD parallèle à AB; nous donnerons à ce plan le nom de plan de choc. Dans ce plan d'ailleurs, ou du moins à une distance infiniment petite, se produiront encore — dans le temps fini t — un grand nombre d'autres chocs.

Considérons maintenant les molécules d'un certain système (v, ε, ψ) qui se meut vers la paroi, — la droite perpendiculaire au plan AB faisant fonction d'axe des X, — tous les chocs qui se produisent dans le plan CD auront pour effet de faire *entrer* un certain nombre de molécules dans ce système, comme en (II), et d'en faire *sortir* un nombre égal, comme en (I).

Or, en général, les molécules qui *entrent* ont leur centre *à droite* du plan CD, celles qui *sortent* l'ont *à gauche ;* les premières sont donc en moyenne plus près du plan AB que les secondes, en d'autres termes, il y a de la distance économisée — quant au rapprochement des molécules du plan AB, — par suite des chocs [1]). Pour savoir à *combien* s'élève la somme des distances ainsi économisées pour toutes les molécules du système (v, ε, ψ) durant le temps dt dans l'unité de volume, il suffit de calculer

$$\Sigma a_1 b_1 + \Sigma a_2 b_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en étendant la sommation d'une part à tous les chocs par lesquels des molécules *sortent* du système en question, et d'autre part à tous les chocs par lesquels des molécules *entrent* dans ce système.

---

1) On doit donc se représenter les choses ainsi: chaque plan idéal de choc reçoit pour ainsi dire à chaque instant un grand nombre de molécules de toutes directions et de toutes vitesses, et en même temps il en repousse un nombre égal. Mais celles qu'il reçoit sont déjà arrêtées avant que leur centre atteigne le plan de choc, tandis que celles qu'il repousse partent déjà à une certaine distance en avant du plan de choc, dans la direction où elles continueront à se mouvoir. Il est évident que par là de la distance se trouve économisée.

2. Si nous imaginons qu'au bout du temps dt le plan AB soit subitement transporté à l'autre côté de CD, et qu'en outre à ce même instant les vitesses de toutes les molécules soient renversées, il faudra nécessairement que toutes les *sorties*, qui ont eu lieu pendant ce temps dt, reviennent comme *entrées*, et réciproquement. Néanmoins, dans son ensemble, l'état de mouvement du gaz n'aura subi aucune altération, et la somme $\Sigma a_2 b_2$ pour les nouvelles *entrées* ne pourra donc pas différer de la somme $\Sigma a_1 b_1$ pour les anciennes; il en résulte immédiatement:

$$\Sigma a_1 b_1 = \Sigma a_2 b_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

de sorte que la somme cherchée des distances économisées est représentée par:

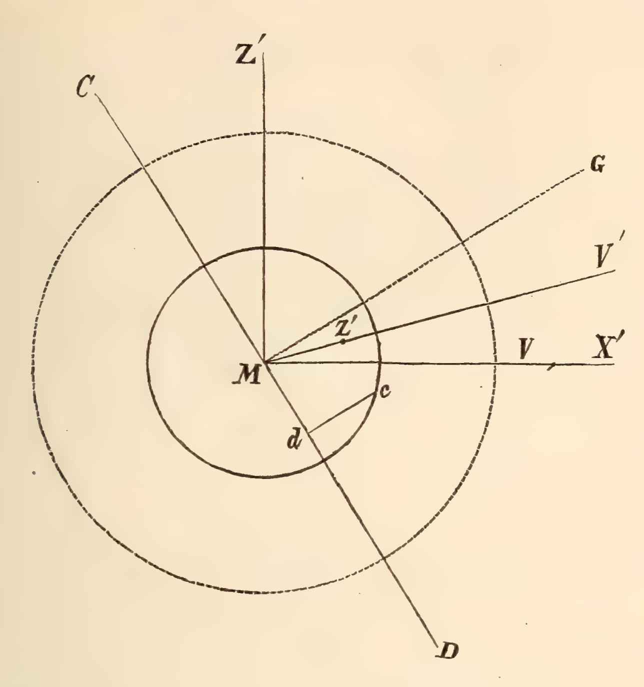
$$2 \Sigma a_1 b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ou, — en abaissant du point de contact c une perpendiculaire au plan mené parallèlement au plan AB par le centre de la molécule sortante, — par:

$$2 \Sigma cd \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

3. En désignant par P le nombre des molécules appartenant au système $(v, \varepsilon, \varphi)$, il suffira donc de considérer tous les chocs de ces molécules avec les autres molécules, d'abaisser à chaque choc, du point de contact, une perpendiculaire sur un plan passant par le centre et faisant un angle $90^\circ - \varepsilon$ avec la direction du mouvement, et enfin de sommer toutes ces perpendiculaires.

Afin de pouvoir effectuer cette sommation, il sera nécessaire de partager aussi les autres molécules en systèmes. Mais rien ne nous oblige à faire ces systèmes indentiques à ceux qui correspondent aux axes employés dans la figure 1. Aussi choisirons nous un tout autre système d'axes O X′ Y′ Z′, où l'axe O′ X′ est pris dans la direction du mouvement du système $(v, \varepsilon, \varphi)$, et où le plan Z′ O′ X′ est perpendiculaire au plan CD de la fig. 1, qui fait un angle $90^\circ - \varepsilon$ avec cette direction de mouvement.



4. Soit donc M une des P molécules désignées ci-dessus et par conséquent v sa vitesse, c le point de contact, et $c\,d$ la perpendiculaire abaissée sur le plan C D, correspondant au plan C D de la fig. 1 ; il s'agit alors de déterminer :

$$\Sigma\, c\,d.$$

Pour y parvenir, commençons de nouveau par considérer uniquement les chocs avec le système $(v'\,\varepsilon'\,\psi')$, déterminé par rapport aux nouveaux axes et contenant, dans l'unité de volume, un nombre de molécules égal à

$$P' = \frac{\sin\varepsilon' \,.\, d\,U_v' \,.\, d\varepsilon' \,.\, d\psi'}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Le nombre A' des chocs de nos P molécules avec les molécules de ce système sera, conformément à la formule (9) du Mémoire précédent :

$$A' = \frac{1}{4} \,.\, \varrho^2 \,.\, P \,.\, \sqrt{v^2 + v'^2 + 2vv'\cos\varepsilon} \,.\, \sin\varepsilon' \,.\, dU_{v'} \,.\, d\varepsilon' \,.\, d\psi' \,.\, dt \quad (6)$$

et si, pour tous ces chocs, la valeur moyenne y de cd était connue, la distance économisée serait représentée par:

$$A' y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

C'est donc, pour le moment, au calcul de la distance moyenne y que nous devons nous appliquer.

5. Soit, à cet effet, MV ou plutôt V'M la direction du mouvement apparent des molécules du système (v', ε', ψ'), par rapport à la molécule donnée M, supposée en repos. Cette direction étant déterminée de la manière habituelle, par les angles ε_0 et ψ_0, on a:

$$\sin \varepsilon_0 = \frac{v' \sin \varepsilon'}{\sqrt{v^2 + v'^2 + 2vv' \cos \varepsilon'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{v' \cos \varepsilon' + v}{\sqrt{v^2 + v'^2 + 2vv' \cos \varepsilon'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\psi_0 = \psi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Menons un plan (non représenté dans la figure) perpendiculaire à cette vitesse apparente, et remplaçons de nouveau la molécule M par une sphère de rayon double, et toutes les autres molécules par des points; chaque passage d'un de ces points à travers la surface sphérique agrandie correspondra alors à un choc, et pour chacun des éléments de cette surface la probabilité d'être rencontré sera proportionnelle à la projection de cet élément sur le plan que nous venons de mener.

Mais, dans chaque choc, le point de contact se trouve précisément au milieu du rayon mené de M au centre de la molécule choquante, d'où il suit que, pour un élément de la surface *non* agrandie, la probabilité d'être touché est également proportionnelle à sa projection sur le plan perpendiculaire à MV'. S'il en est ainsi, la distance moyenne des points de contact des chocs à un plan quelconque est égale à la distance, à ce même plan, d'un centre de gravité obtenu en donnant, à chacun des éléments

superficiels de la demi-sphère qui a M V' pour axe, une masse proportionnelle à sa projection sur le plan perpendiculaire à M V'.

Or ce centre de gravité Z', situé sur M V', a déjà été déterminé dans le Mémoire précédent. Il est situé aux deux-tiers du rayon de la demi-sphère; on a donc:

$$MZ' = \frac{1}{3}\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

et pour trouver la valeur de y il suffira de chercher la distance de ce point Z' au plan C D, en d'autres termes, de projeter M Z' sur la normale M G du plan C D.

A cet effet, il faut projeter d'abord M Z' sur chacun des trois axes, ce qui donne:

$$\text{sur } MX' : MZ' . \cos\varepsilon_0$$
$$\text{sur } MY' : MZ' . \sin\varepsilon_0 \sin\psi_0$$
$$\text{sur } MZ' : MZ' . \sin\varepsilon_0 \cos\psi_0$$

puis projeter chacune de ces projections sur M G, et prendre la somme; on trouve ainsi:

$$y = MZ' \cos\varepsilon_0 . \cos\varepsilon - MZ' \sin\varepsilon_0 . \cos\psi_0 . \sin\varepsilon \ldots \quad (12)$$

ou:

$$y = \frac{1}{3} . \varrho . \{\cos\varepsilon_0 . \cos\varepsilon - \sin\varepsilon_0 . \cos\psi_0 . \sin\varepsilon\} \ldots \quad (13)$$

ou encore, en vertu de (8) et (9):

$$y = \frac{1}{3}\varrho \frac{(v + v'\cos\varepsilon')\cos\varepsilon - v'\sin\varepsilon' . \cos\psi' . \sin\varepsilon}{\sqrt{v^2 + v'^2 + 2vv'\cos\varepsilon'}} \ldots \quad (14)$$

de sorte que la somme de toutes les distances économisées par suite des chocs avec le système $(v', \varepsilon', \psi')$ s'élève, conformément à (6) et (7), à:

$$\frac{1}{12}.\varrho^3.P.\{(v+v'\cos\varepsilon')\cos\varepsilon.\sin\varepsilon' - v'.\sin^2\varepsilon'.\cos\psi'.\sin\varepsilon\}\,dU_{v'}.d\varepsilon'.d\psi'.dt \quad (15)$$

expression qui doit être intégrée par rapport à ψ' de 0 à 2π, par rapport à ε' de 0 à π, par rapport à v' de 0 à ∞. De cette manière, on obtient la somme de toutes les distances économisées dans tous les chocs du système (v, ε, ψ).

6. La première intégration donne:

$$\frac{1}{6}\pi \varrho^3 . P . (v + v' \cos \varepsilon') . \cos \varepsilon . \sin \varepsilon' . dU_{v'} . d\varepsilon' . dt. \quad (16)$$

la seconde:

$$\frac{1}{3}\pi \varrho^3 . P . \cos \varepsilon . v . d . U_{v'} . dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

la troisième, enfin:

$$\frac{1}{3}\pi \varrho^3 . P . U . \cos \varepsilon . v . dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

ou:

$$2 A . P . v . \cos \varepsilon . dt \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

expression où A représente de nouveau le volume des molécules.

On a donc (voir § 4):

$$\Sigma c d = 2 A P v \cos \varepsilon . dt \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

et la somme de toutes les distances économisées à raison des chocs est par conséquent:

$$2 \Sigma c d = 4 A . P . v . \cos \varepsilon . dt \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Mais la somme de toutes les distances dont les P molécules du système (v, ε, ψ) se rapprochent du plan AB, dans l'intervalle de temps dt, est évidemment:

$$P . v \cos \varepsilon . dt \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

pour produire le même nombre de chocs avec le plan AB, les molécules n'ont donc à parcourir, au lieu du chemin (22), qu'un chemin:

$$P v \cos \varepsilon (1 - 4 A) dt \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

en d'autres termes, le nombre des chocs de ce système est augmenté dans le rapport:

$$1 - 4A : 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Les divers systèmes étant d'ailleurs entièrement analogues entre eux, le nombre des chocs de toute espèce, avec le plan AB, sera augmenté dans ce même rapport. La même augmentation aura donc aussi lieu pour la pression, et en désignant par D la pression qui existerait en l'absence de chocs entre les molécules, et par D' la pression véritable, celle qui se produit réellement, on aura:

$$D' = \frac{D}{1 - 4A}.$$

SUR

LA PROPAGATION DU SON,

PAR

H. J. RINK.

Les fondements sur lesquels repose la nouvelle théorie des gaz sont généralement connus, et les expériences de M. Joule sont si décisives qu'on ne peut guère faire autrement que de l'accepter. Pourtant, si l'on considère la façon dont il est rendu compte, d'après cette théorie, des phénomènes que présentent les gaz, on doit être frappé des défauts et de l'insuffisance des explications. M. Maxwell et plus tard M. Boltzmann ont bien établi des équations générales concernant le mouvement des molécules gazeuses, mais sans faire l'application de ces équations compliquées aux phénomènes simples connus expérimentalement. En outre, ces équations supposent que les molécules gazeuses n'agissent pas, dans le choc, comme des sphères parfaitement élastiques, mais qu'il intervient alors des forces répulsives inversement proportionnelles aux 5èmes puissances des distances. Cette hypothèse, admise par M. Maxwell pour expliquer la proportionnalité, empiriquement démontrée, du coefficient de frottement des gaz et de la température absolue, paraît toutefois inconciliable avec les résultats des expériences connues de M. Thomson et de M. Joule, lesquelles indiquent plutôt l'existence d'une force attractive entre les molécules des gaz. L'excellent ouvrage de Verdet, „*Théorie mécanique de la chaleur*", dans la section consacrée à la „théorie de la constitution des gaz", donne seulement l'explication de la loi de Boyle—Gay-Lussac et un résumé du Mémoire de M. Clausius sur la conduction de

la chaleur dans les gaz. Quant aux autres phénomènes que nous offrent les gaz, on s'en est jusqu'ici très peu occupé, et le plus souvent on en parle comme si l'ancienne théorie, dans laquelle la tension des gaz est attribuée à l'existence de forces répulsives agissant entre les molécules en repos, était encore en pleine vigueur et à l'abri de toute objection. Dans les traités de physique les plus recommandables, la nouvelle théorie est mentionnée et la nécessité de l'adopter rendue évidente, mais ensuite il n'en est plus tenu le moindre compte. Si cela s'explique jusqu'à un certain point par la difficulté de présenter de pareils sujets sous une forme élémentaire, on peut s'étonner à bon droit que mêmes des écrits très savants, relatifs entre autres à la propagation du son dans les gaz, continuent à s'appuyer sur l'ancienne théorie des gaz, si universellement rejetée. On ne voit même guère essayer de montrer que les résultats sont indépendants de l'hypothèse adoptée et qu'ils se laissent entièrement déduire de lois données par l'expérience, ainsi que cela est par exemple le cas pour les développements mathématiques concernant la distribution de l'électricité sur les conducteurs, lesquels développements peuvent être considérés, en dehors de toute théorie sur la nature de l'électricité, comme des conséquences de la loi de Colomb, trouvée expérimentalement [1]).

A ma connaissance, très peu de tentatives ont été faites dans cette direction, et ces tentatives ne me paraissent pas avoir été couronnées de beaucoup de succès.

M. Briot, dans sa „*Théorie mécanique de la chaleur*", p. 182, s'exprime ainsi: „Il en résulte que l'ensemble est un état vibratoire irrégulier, chaque molécule se mouvant en zigzag dans un très petit espace. L'état général est le même que si les molécules étaient immobiles et se repoussaient suivant une certaine fonction de la distance et de la température ..... D'après cela, la nouvelle théorie des gaz ne détruit pas les anciens travaux sur la propagation du son".

---

[1]) Clausius, *Abhandlungen*, II, p. 60.

M. Hoorweg[1]) essaie de donner à l'équation connue du mouvement des gaz,

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = v^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2}\right),$$

une signification conforme à la théorie nouvelle, en regardant les expressions $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ non comme les composantes des vitesses des molécules, mais comme les composantes du changement que la source vibratoire produit dans la vitesse réelle des molécules.

Je me propose de montrer, dans ce qui suit, que ni par la remarque de M. Briot, ni par les considérations de M. Hoorweg, les conceptions sur la propagation du son n'ont acquis une base solide, et qu'il existe bien dûment des cas où la nouvelle théorie conduit à des résultats différents de ceux qu'on a obtenus antérieurement.

La remarque de M. Briot, énoncée sans aucun développement spécial, ne manquerait peut-être pas de quelque justesse, si le chemin moyen des molécules était inférieur ou égal à la distance moyenne des molécules voisines (*Nachbarmoleculen*), et que le rayon des sphères d'action fût une fraction notable de la moitié de cette distance. Alors, du moins, on pourrait admettre, en général, que quelques molécules, comprises dans un certain volume, conservent, malgré leurs mouvements, une même position les unes par rapport aux autres. Mais M. Clausius[2]), calcule que, l désignant le chemin moyen, λ la distance moyenne des molécules voisines, et ϱ le rayon moyen des sphères d'action, on a:

$$l = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi\varrho^3}\,\varrho.$$

$\frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi\varrho^3}$ est le rapport du volume total du gaz à celui de l'ensemble

---

[1]) *Arch. néerl.*, t. XI, p. 131 et suiv.

[2]) Clausius, *Abhandlungen*, II, p. 272.

des sphères d'action, et, en supposant par exemple, avec M. Clausius, ce rapport égal à 1000, on obtient:

$$l = 62\lambda = 100\lambda.$$

Les molécules se meuvent donc entre un très grand nombre d'autres molécules sans les heurter, et, dans un espace qui est grand comparativement à λ^3, les molécules changent continuellement de place sans exercer d'action les unes sur les autres.

Cette conclusion repose, il est vrai, sur l'hypothèse un peu arbitraire que $\frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi\varrho^3}$ peut être posé $= 1000$ pour l'air à la pression d'une atmosphère. Pour simplifier, nous nous en tenons ici aux formules et à l'exemple de M. Clausius, bien que M. van der Waals [1]) ait montré que dans la valeur de l le coefficient $\frac{4}{3}$ de M. Clausius doit être remplacé par le coefficient $\sqrt{2}$ de M. Maxwell. De même, nous négligeons le raccourcissement que le chemin éprouve à raison des dimensions des molécules. Ces petites inexactitudes sont sans importance pour notre raisonnement.

On voit donc que la remarque de M. Briot, du moins sans démonstration ultérieure, ne suffit pas à autoriser la conclusion que la nouvelle théorie des gaz n'apporte aucune modification aux développements relatifs à la propagation du son.

M. Hoorweg, dans le Mémoire ci-dessus cité, part de l'hypothèse que toutes les molécules gazeuses reçoivent de la source vibratoire, en addition à la vitesse qu'elles possèdent déjà, une vitesse nouvelle, dont les composantes $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont des fonctions du temps et des coordonnées du point que l'on considère. La vitesse primitivement existante est supposée la même pour toutes les molécules, et toutes les directions de mouvement y sont supposées également représentées. Nous lisons, en effet (p. 135): „Or, le calcul que je viens de rappeler peut aussi être appliqué au cas dont nous nous occupons ici. De même que la vitesse des molécules d'air est modifiée par la surface chaude,

[1]) *Arch. néerl.*, t. XII.

elle l'est aussi, dans ma manière de voir, par le diapason vibrant. Pour trouver l'état de mouvement de l'air en présence d'un corps vibrant, nous n'avons qu'à donner à toutes les molécules une même vitesse dans toutes les directions possibles, puis à ajouter une petite composante, qui est la même pour toutes les molécules de la même couche et qui trouve son origine dans le mouvement de la source sonore."

Mais ce qui est ici *admis*, relativement à la vitesse imprimée aux molécules par la source vibrante, est précisément ce qui doit être *expliqué*. Il s'agit de savoir quelles sont les particularités du mécanisme par lequel le mouvement vibratoire de la source est communiqué aux molécules voisines, et comment ce mouvement se propage et se transmet à d'autres molécules; or, c'est là un point dont le Mémoire de M. Hoorweg ne s'occupe pas. En outre, on y admet que ces vitesses $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont les mêmes que celles de la source vibratoire, et que par suite il est permis de poser

$$\varphi = C \frac{\cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^n};$$

après quoi, on juge remarquable de retrouver les équations fondamentales déjà connues, tandis que le résultat devait pourtant découler immédiatement, sans aucun calcul, de l'hypothèse en question.

Les développements très étendus du Mémoire de M. Hoorweg ne reposent donc pas sur la nouvelle théorie des gaz, mais sur l'ancienne; la première est appliquée seulement à des points accessoires, les choses essentielles sont empruntées à la seconde.

Notons aussi le rapport qui existerait, selon M. Hoorweg, entre la vitesse de propagation du son et la vitesse des molécules. Celle-là s'élève, pour l'air à 0°, à 332 m., celle-ci à 485 m. M. Hoorweg croit qu'il serait naturel que ces deux vitesses fussent égales:

„D'ailleurs, si le mouvement des molécules d'air est la cause

de la propagation du son, la vitesse doit être égale à celle des molécules qui se meuvent" [1]).

Il faut donc chercher une explication de cette inégalité, et elle est trouvée dans le retard que la propagation éprouve par suite du temps nécessaire pour le choc des molécules.

Mais on ne nous dit pas pourquoi l'on devrait s'attendre à l'égalité des deux vitesses, et pourtant un éclaircissement à ce sujet n'aurait pas été superflu; si l'on remarque, en effet, que les molécules se meuvent également dans toutes les directions, et que par conséquent une particularité du mouvement de certaines molécules se propage tantôt dans une direction, tantôt dans une autre, tandis que la propagation du son implique l'extension dans une direction déterminée, on devrait s'attendre, à priori, à trouver la vitesse de propagation du son notablement moindre que la vitesse de translation des molécules.

Une autre conséquence singulière peut encore être déduite de la manière de voir de M. Hoorweg. Si, pour trouver le temps dans lequel le son se propage à la distance de 485 m., il faut ajouter à 1 seconde le temps nécessaire pour les chocs des molécules qui opèrent la propagation, la vitesse du son dépendra du nombre de ces chocs; or ce nombre étant proportionnel à la densité, la vitesse diminuera quand la densité augmente, de sorte que, par exemple, dans l'air ayant le double de sa densité ordinaire, la vitesse serait réduite à environ 240 m.

Nous allons maintenant traiter une question qui a rapport à la propagation du son, et dans laquelle on peut comparer les résultats obtenus soit en partant de la nouvelle théorie des gaz, soit en appliquant l'ancienne; cette question est celle de l'intensité du son. A. M. Grinwis revient l'honneur d'avoir plus spécialement fixé l'attention sur ce point important pour la propagation du son. Dans plusieurs Mémoires [2]), il a examiné comment l'intensité du son pouvait être représentée pour des modes divers

[1]) *l. c.*, p. 133.

[2]) *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wet.*, t. VII et VIII. — *Arch. néerl.*, t. X.

de propagation, et à cet effet il a pris pour mesure de l'intensité, en un point donné, la valeur moyenne de l'énergie produite en ce point par le mouvement sonore dans la durée d'une vibration. Cette énergie se compose de deux parties, l'énergie potentielle, sous la forme d'air comprimé ou raréfié, et l'énergie actuelle, sous la forme de vibrations des molécules d'air. Parmi tous les résultats remarquables fournis par cette étude, le plus important pour nous est celui d'après lequel l'énergie, bien que variable dans les quarts successifs de l'onde, est la même pour les deux moitiés de l'onde. C'est ainsi, par exemple, que dans le cas de la propagation dans un cylindre indéfini, lorsque $\varphi = A \cos k (x - a t)$ est le potentiel du mouvement de l'air (Q étant la section du cylindre), on trouve pour

l'énergie dans le 1er quart d'onde $\frac{\pi \varrho_0 Q}{\lambda} A^2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin 4\pi n t\right)$

» » » 2e » » $\frac{\pi \varrho_0 Q}{\lambda} A^2 \left(\frac{\pi}{2} + \sin 4\pi n t\right)$

» » » 3e » » $\frac{\pi \varrho_0 Q}{\lambda} A^2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin 4\pi n t\right)$

» » » 4e » » $\frac{\pi \varrho_0 Q}{\lambda} A^2 \left(\frac{\pi}{2} + \sin 4\pi n t\right)$

Pour les deux moitiés de l'onde, le temps disparaît donc de la valeur de l'énergie, et l'énergie dans une demi-onde dilatée ou condensée est représentée par:

$$\frac{\pi^2 \varrho_0 Q}{\lambda} A^2.$$

Nous nous placerons dans les mêmes conditions que M. Grinwis, en supposant que l'on ait un cylindre droit de section quelconque et de longueur illimitée. En un certain point du cylindre se trouve une plaque perpendiculaire à l'axe, de même grandeur que la section S du cylindre, et exécutant des vibrations qui mettent des deux côtés l'air en mouvement. Cherchons quelle est, dans ces conditions, l'énergie communiquée à la masse d'air située à l'un des côtés de la plaque.

Supposons d'abord que la plaque se meuve vers la masse d'air dans laquelle nous voulons étudier la communication de l'énergie.

La plaque étant animée à un certain moment de la vitesse v, soit u la vitesse d'une molécule d'air déterminée. Nous admettons que la vitesse v est petite par rapport à u, mais assez grande pour que l, la longueur moyenne du chemin parcouru par les molécules, soit petite relativement à $v \, . \, dt$, dt étant le temps durant lequel nous étudions le mouvement.

Considérons, en premier lieu, les molécules dont la vitesse est comprise entre u et $u + du$.

La force vive d'une de ces molécules est $\frac{mu^2}{2}$. Si la direction dans laquelle se meut cette molécule fait un angle $180° - \theta$ avec celle dans laquelle la plaque s'avance avec la vitesse v, la force vive de la molécule sera augmentée, lors du choc de cette molécule contre la plaque, de la quantité $\delta = \frac{m}{2}(4v^2 + 4uv\cos\theta)$.

En effet, la composante normale de la vitesse, $u\cos\theta$ avant le choc, est $u\cos\theta + 2v$ après le choc, de sorte que le carré de la vitesse devient alors $(u\sin\theta)^2 + (u\cos\theta + 2v)^2$.

Pour abréger, nous dirons dans la suite qu'une molécule, qui se meut dans la direction que nous venons d'indiquer, a une direction de mouvement θ.

Si maintenant il existe dans l'unité d'espace n molécules ayant une vitesse entre u et $u + du$, il s'en trouvera parmi elles $\frac{n}{2}\sin\theta \, d\theta$, qui auront une direction de mouvement comprise entre θ et $\theta + d\theta$. Combien y aura-t-il de ces molécules qui choqueront la plaque dans le temps dt?

Pour repondre à cette question, nous déterminerons d'abord le nombre des chocs qui auraient lieu dans le temps dt si la plaque était en repos, puis nous chercherons comment ce nombre est modifié par le mouvement de la plaque. En supposant pour un instant supprimées toutes les molécules dont la direction de

mouvement n'est pas comprise entre θ et $\theta + d\theta$, et en faisant par conséquent abstraction des chocs que les molécules peuvent subir entre elles, il est clair que les seules molécules qui pourront atteindre la plaque dans le temps dt sont celles dont la distance à cette plaque, à l'origine de ce temps, était moindre que $u \cos\theta . d\theta$. Le nombre des molécules choquantes serait représenté dans ce cas par $q = S. u. \cos\theta. dt. \frac{n}{2} \sin\theta. d\theta$.

Ce nombre de chocs, correspondant à l'hypothèse simple que nous venons de faire, sera-t-il modifié si les autres molécules interviennent et que par suite il y ait aussi des chocs entre les molécules elles-mêmes?

Tandis que, dans notre hypothèse simple, toutes les molécules qui se trouvent dans l'espace $S. u. \cos\theta\, dt$ viennent successivement choquer la plaque, cela n'aura plus lieu dans le cas actuel; en effet, si cela avait lieu, la plupart des molécules auraient à parcourir un chemin très grand comparativement au trajet moyen l. Un petit nombre seulement des molécules qui occupent cet espace viendront donc heurter la plaque, mais, par contre, elles le feront à différentes reprises, à savoir lorsque, ayant choqué d'autres molécules, elles seront repoussées vers la plaque. Or, il n'est pas difficile de voir que, en vertu du concours de ces deux circonstances, le nombre des chocs restera le même que dans l'hypothèse simple. Une molécule à direction de mouvement θ, qui n'atteint pas la plaque parce qu'elle se heurte à d'autres molécules, perd, il est vrai, cette direction de mouvement; mais cette direction doit alors être donnée à une autre molécule, vu que le nombre des molécules ayant une direction de mouvement déterminée ne change pas par leurs chocs mutuels. Autant il y a, dans le nombre total $q = S. u. \cos\theta. dt. \frac{n}{2} \sin\theta. d\theta$, de molécules qui perdent leur direction de mouvement par suite des chocs mutuels, autant il y en a d'autres qui, précisément par cette cause, acquièrent cette même direction de mouvement, et le seul effet des chocs mutuels consiste donc en ceci, que les

chocs contre la plaque sont exécutés par d'autres molécules que dans le cas simple supposé d'abord.

Pour la plaque en repos, le nombre total des chocs, exécutés par les molécules qui ont une vitesse u, serait donc:

$$Q = S\frac{n}{2}u\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\, S n\, u\, dt.$$

Mais si la plaque se meut avec la vitesse v, le résultat que nous venons d'obtenir doit être modifié en conséquence; la vitesse avec laquelle les molécules approchent de la plaque est alors $v + u\cos\theta$, au lieu de $u\cos\theta$, de sorte que le nombre des chocs de ces molécules contre la plaque en mouvement devient:

$$q' = S\,(v + u\cos\theta)\, dt\, \frac{n}{2}\, \sin\theta\, d\theta.$$

A chaque choc sous l'angle θ, l'accroissement de force vive pour une molécule est $2m\,(v^2 + u\,v\cos\theta)$, et la quantité totale d'énergie communiquée par la plaque aux molécules qui se meuvent avec la vitesse u s'élève à:

$$\delta = u m\, S\, v\, dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (v + u\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta = u m\, S\, v dt\,(\tfrac{1}{3}u^2 + uv + v^2).$$

Peut-être, au lieu d'intégrer entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, aurait-on pu prendre pour la seconde limite $\arccos - \frac{v}{u}$ ou $\arccos - \frac{v}{2u}$; mais cela n'aurait eu qu'une faible influence sur le dernier terme.

Jusqu'ici nous avons uniquement considéré les molécules qui se meuvent avec une vitesse u, tandis que la masse gazeuse renferme des molécules animées de toutes sortes de vitesses différentes. Pour trouver l'énergie communiquée à la masse entière du gaz, nous devons donc étendre l'expression δ à ces différentes

vitesses. Nous avons désigné par n le nombre des molécules, dans l'unité de volume, dont la vitesse est comprise entre u et $u + d\,u$. D'après M. Maxwell, on a alors:

$$u = \mathrm{N} \,.\, \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} u^2 \, e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \, d\,u,$$

N représentant le nombre total des molécules qui se trouvent dans l'unité de volume.

Nous avons donc:

$$\Delta = \mathrm{N} \,.\, \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} m \, \mathrm{S} \, v \, d\,t \int_0^\infty u^2 \, e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} (\gamma_3 \, u^2 + u v \, v^2)$$

$$\Delta = \frac{\mathrm{N} m \; \mathrm{S} \, v \, d\,t}{2} \left(\alpha^2 + \frac{4\,\alpha}{\sqrt{\pi}} v + 2 v^2 \right),$$

ou, en introduisant au lieu de α la valeur moyenne du carré des vitesses β^2, et observant qu'on a $\alpha^2 = \frac{2}{3} \beta^2$:

$$\Delta = \mathrm{N} m \; \mathrm{S} \, v \, d\,t \left(\tfrac{1}{3} \beta^2 + \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} \beta v + v^2 \right).$$

Nous pouvons regarder v comme fonction de t, afin de représenter ainsi le mouvement vibratoire de la plaque. Soit donc

$$v = \mathrm{C} \,.\, \sin k\,t,$$

nous aurons alors, après avoir introduit cette valeur de v dans Δ, à intégrer entre les limites 0 et $\frac{\pi}{k}$, pour obtenir l'expression de l'énergie communiquée à l'air par le mouvement de la plaque dans l'une des deux directions. On trouve ainsi:

$$\mathrm{D} = \mathrm{N} m \, \mathrm{S} \left\{ \tfrac{1}{3} \beta^2 \mathrm{C} \int_0^{\frac{\pi}{x}} \sin kt + 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \, \beta \, \mathrm{C}^2 \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin^2 kt + \mathrm{C}^3 \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin^3 kt \,.\, dt \right\}$$

$$\frac{\mathrm{N} \, m \, \mathrm{S}}{k} \left(\tfrac{2}{3} \beta^2 \, \mathrm{C} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \,.\, \beta \, \mathrm{C}^2 + \tfrac{4}{3} \mathrm{C}^3 \right),$$

ou, en remarquant que, lorsque T représente la durée de vibration, on a $k = \frac{2\pi}{T}$, et que Nm est la densité ϱ:

$$D = \varrho \frac{S \cdot T}{2\pi} \left(\tfrac{2}{3} \beta^2 C + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \beta C^2 + \tfrac{4}{3} C^3 \right).$$

Pour avoir l'énergie communiquée à l'air dans le mouvement rétrograde de la plaque, il faut prendre v négativement, ou intégrer entre les limites $\frac{\pi}{k}$ et $\frac{2\pi}{k}$. On obtient alors:

$$D' = \varrho \frac{S \cdot T}{2\pi} \left(-\tfrac{2}{3} \beta^2 C + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \beta C^2 - \tfrac{4}{3} C^3 \right).$$

Comme on peut toujours attribuer à C une valeur petite comparativement à celle de u, le premier terme de l'expression de D a une importance prépondérante, ce qui prouve que dans le mouvement rétrograde de la plaque celle-ci ne communique pas d'énergie à l'air, qui en cède au contraire à la plaque. Dans la durée entière d'une vibration, la quantité d'énergie reçue par l'air est toutefois plus grande que celle qu'il cède, et l'on a:

$$D + D' = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \varrho \cdot S \cdot T \cdot \beta C^2.$$

Comparons maintenant ces résultats avec ceux de M. Grinwis. Il ne faudra pas perdre de vue, dans cette comparaison, que M. Grinwis calcule l'énergie existant dans les parties de l'onde aérienne supposée toute formée, tandis que nous avons cherché l'énergie communiquée à l'air par la plaque, sans nous préoccuper de la question de savoir comment cette énergie se divise et se distribue ultérieurement dans la masse d'air. Au point de vue de la nouvelle théorie des gaz, ce sont là deux questions tout à fait distinctes. Nous ne pouvons donc pas appliquer notre calcul au cas traité par M. Grinwis. Mais la réciproque est permise: d'après l'ancienne théorie, en effet, l'énergie qui existe en un point situé à la distance x de la source sonore (la

propagation ayant lieu dans un tube cylindrique) a été cédée par cette source à un moment depuis lequel s'est écoulé le temps $\frac{x}{a}$. Le calcul de M. Grinwis s'applique donc aussi, dans cette théorie, au cas considéré par nous, de sorte que les résultats obtenus de part et d'autre sont susceptibles d'être comparés. Sous le rapport de la quantité d'énergie communiquée à l'air pendant les deux moitiés de la vibration, il y a entre ces résultats une grande différence. Selon M. Grinwis, ces quantités sont égales; d'après nous, l'une d'elles a une valeur positive, l'autre une valeur négative. En ce qui concerne la valeur de l'énergie cédée durant une vibration, l'accord est plus satisfaisant. M. Grinwis trouve:

$$U = \frac{2\pi^2 \varrho_0 Q}{\lambda} . A^2.$$

la grandeur A est déterminée par le potentiel

$$\psi = A \cos k (x - at)$$

d'où résulte $A k$ pour la valeur maximum de la vitesse, laquelle valeur correspond à C. La quantité k est d'ailleurs égale à $\frac{2\pi}{\lambda}$, de sorte qu'on a:

$$U = \tfrac{1}{2} \varrho_0 Q \lambda . C^2 = \tfrac{1}{2} \varrho_0 Q T . a . C^2,$$

valeur qui ne diffère de la nôtre que par le facteur a, qui y remplace le facteur $2\sqrt{\frac{2}{3}}\beta$. En remarquant en outre que, si γ représente la vitesse moyenne des molécules, on a

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}},$$

et qu'on a aussi $\beta = \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}$, on voit que notre facteur $\sqrt{\frac{2}{3}}\beta$ est $= \frac{1}{2}\gamma$. Il ne s'agit donc ici que d'une substitution entre les

grandeurs a (vitesse de propagation du son) et γ (vitesse moyenne des molécules du gaz).

La différence des résultats revient donc essentiellement à ceci, que le premier terme de D et de D', à savoir $\pm \varrho \frac{S T \beta^2 C}{3\pi}$, manque chez M. Grinwis. Or cette différence est considérable, car ce premier terme est de beaucoup le plus grand, à raison de ce que C a été supposé petit comparativement à u. La signification de ce premier terme ne se dévoilera, toutefois, que lorsque nous aurons examiné ce qui advient des molécules choquées par la plaque.

Pour cela, il nous faut chercher sur combien de molécules se distribue l'énergie

$$\Delta = N m S v d t \left(\tfrac{1}{3} \beta^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \beta . v + v^2\right),$$

ou combien de molécules éprouvent l'action de la plaque. Il n'est pas difficile de voir que les seules molécules qui se trouveront dans ce cas sont celles qui existaient primitivement dans l'espace parcouru par la plaque, ou du moins que leur nombre ne différera que très peu de celui de ces dernières. Car, s'il y avait une différence notable, le surplus des molécules choquées devraient, pour arriver en contact avec la plaque, parcourir un trajet qui serait grand par rapport au trajet moyen, attendu que le chemin parcouru par la plaque, $v\,d\,t$, est aussi supposé grand comparativement à ce trajet moyen. En outre, si des molécules du dehors pénètrent dans l'espace $S\,v\,d\,t$, il y en aura d'autres qui sortiront de cet espace. Le nombre des molécules choquées est donc N. S. $v\,d\,t$, et l'accroissement moyen de la force vive de chacune de ces molécules est:

$$d = m\,(\tfrac{1}{3} \beta^2 + \gamma v + v^2).$$

Mais la valeur que nous venons de trouver pour l'accroissement de l'énergie des molécules de l'air ne sert pas entièrement à augmenter la vitesse du mouvement progressif de ces molécules;

une partie en est employée, par suite des chocs entre les molécules elles-mêmes, à augmenter la vitesse des éléments de la molécule, et le rapport constant entre la force vive totale et celle du mouvement progressif subsiste toujours. La quantité d'énergie qui est appliquée à augmenter ce dernier mouvement est donc:

$$T = \tfrac{3}{2}\frac{C - c}{c}\Delta = \tfrac{3}{2}\frac{C - c}{c} N m \; S v d t \left(\tfrac{1}{3}\beta^2 + \gamma v + v^2\right),$$

Pour chaque molécule, la valeur moyenne $\frac{mu^2}{2}$ se change par conséquent en celle-ci:

$$T = \frac{mu^2}{2} + \tfrac{3}{2}\frac{C-c}{c} m\left(\tfrac{1}{3}\beta^2 + \gamma v + v^2\right) = \frac{m}{2}\frac{C}{c}\beta^2 + \tfrac{3}{2}\frac{C-c}{c} m(\gamma v + v^2).$$

Jusqu'ici nous n'avons pas fait usage de la simplification qui aurait lieu si l'on négligeait l'influence du 2e et du 3e terme, c'est-à-dire si l'on agissait comme on le fait toujours en traitant de la propagation du son. Nous avons expressément renoncé à cette simplification afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de M. Grinwis, dans la formule duquel, pour l'énergie d'une onde, la vitesse de la source vibratoire n'entre qu'à la seconde puissance.

Une autre simplification a été introduite tacitement: nous avons admis que l'espace dans lequel les molécules d'air peuvent se mouvoir est égal au volume occupé par elles; c'est-à-dire que nous n'avons pas tenu compte du volume des sphères d'action des molécules. Nos expressions devraient en conséquence être multipliées par la fraction $\frac{1}{1 - N.\frac{2}{3}\pi\varrho^3}$ [1]) (ϱ étant le rayon de la sphère d'action); mais nous croyons pouvoir supprimer ici ce facteur.

Si l'on néglige les 2e et 3e termes de nos formules, elles deviennent:

---

[1]) M. van der Waals a montré qu'on doit déduire, du volume de la masse gazeuse, le demi-volume des sphères d'action, et non, comme le fait M. Clausius, le volume entier.

(énergie communiquée totale): $\Delta = \frac{1}{3} N m \, S v dt . \beta^2$ 1)

(énergie communiquée du mouvement progressif): $T = \frac{1}{2} \frac{C - c}{c} N m \, S v dt \, \beta^2$ 2)

(énergie du mouvement progressif de chaque molécule après le choc): $T = \frac{C}{c} . \frac{m \beta^2}{2}$ 3)

Nous pouvons nous servir de ces formules pour en déduire les lois de Boyle et de Poisson.

Si P est la pression qui, sur l'unité de surface de la plaque, fait équilibre à l'action des molécules sur cette plaque, P. S. $v dt$ est une forme différente pour l'énergie communiquée, de sorte qu'on a, d'après l'éq. (1):

$$P . S . v . dt = \frac{1}{3} N m \, S . v dt \, \beta^2$$
$$P = \frac{1}{3} N m \beta^2 .$$

Représentons-nous un cylindre limité, dans lequel se trouvent N molécules et dont V soit le volume; en introduisant $N = \frac{N}{V}$, on obtient:

$$P . V = \frac{1}{3} N m \beta^2 .$$

c'est-à-dire l'expression connue de la loi de Boyle.

La formule (2) fait connaître l'élévation de température qu'une masse gazeuse éprouve par suite d'une compression, et elle peut par conséquent conduire à la formule de Poisson. A cet effet, prenons de nouveau une capacité fermée, pour laquelle on ait $N = \frac{N}{V}$. Soit T la température absolue, T est alors proportionnel à $\frac{1}{2} m \beta^2$. L'accroissement de la force vive du mouvement progressif, limité d'abord à un petit espace, occasionne une élévation uniforme de température dans le volume V, et l'accroissement de l'énergie du mouvement progressif est pour chaque molécule:

$$\frac{T}{N} = \frac{1}{2} \frac{C - c}{c} m \beta^2 . \frac{S . v . dt}{V} ;$$

on a donc:

$$dt = \frac{C - c}{c} . T \, \frac{dV}{V}$$

attendu que $S\,v\,dt = dV$ représente la diminution qu'éprouve le volume. En intégrant, on obtient:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{C}{c}-1} = \frac{p_1\,V_1}{p_2\,V_2}$$

$$\text{et} \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{C}{c}},$$

l'expression connue du rapport entre le volume et la pression dans les changements suivant la ligne adiabatique.

Considérons maintenant la propagation du son.

La formule (3)

$$T = \frac{C}{c} \cdot \frac{m\beta^2}{2},$$

qui donne l'énergie moyenne du mouvement progressif de chacune des molécules choquées par la plaque, semble pouvoir conduire à l'expression de la vitesse du son. On serait tenté de décomposer la vitesse de chaque molécule suivant trois directions perpendiculaires entre elles, et, admettant que toutes les directions de mouvement sont représentées au même degré parmi les molécules, de supposer égales les valeurs moyennes des carrés des composantes selon les trois axes; on trouverait ainsi

$$\frac{C}{c} \cdot \frac{\beta^2}{3}.$$

Ce serait donc là la valeur moyenne du carré de la vitesse de progression de ces molécules dans une direction quelconque, et en la regardant comme le carré de la vitesse de propagation du son, on obtiendrait:

$$a = \frac{\beta}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{C}{c}},$$

expression équivalente à la formule de Laplace, $\sqrt{\frac{P}{d} \cdot \frac{C}{c}}$.

Mais ce mode de déduction soulève des objections sérieuses. On y suppose, en effet, que les molécules qui propagent le son

ont toujours une vitesse dont le carré a une valeur moyenne $\frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{C}{c}$, et, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que les molécules qui possèdent cette vitesse plus grande, en choquant des molécules à vitesse ordinaire, perdissent entièrement leur excès de vitesse et le cédassent aux molécules choquées; or cela ne peut jamais arriver. Il n'y aurait aussi, dans ce cas, qu'un très petit nombre de molécules gazeuses qui prendraient part, au même instant, à la propagation du son, et on comprendrait difficilement comment dans la moitié condensée de l'onde la vitesse de propagation pourrait être la même que dans la moitié dilatée, dont les molécules ont une vitesse de progression au-dessous de la vitesse normale. Enfin il faudrait expliquer pourquoi il est ici toujours question de la valeur moyenne du carré des vitesses, et non de la valeur moyenne simple. De cette valeur, on ne saurait par conséquent déduire l'expression de la vitesse du son.

Demandons-nous donc comment la quantité d'énergie, communiquée à certaines molécules, est transmise aux autres.

Nous devons nous représenter une couche d'air contenant plus de molécules que dans l'état normal, et ces molécules animées d'une vitesse moyenne plus grande; qu'arrive-t-il alors quand les molécules de cette couche viennent choquer des molécules normales?

M. van der Waals [1]) a cherché quel est, dans un mélange de deux gaz à densités et à vitesses moyennes différentes, le changement moyen de force vive produit par le choc d'une molécule d'une espèce contre une molécule de l'autre espèce. Bien que cette question ait été résolue par M. van der Waals d'une manière très rigoureuse [2]), on ne saurait méconnaître que sa solution exige des calculs et des intégrations assez compliqués, et que le résultat pourrait être obtenu d'une manière plus simple.

---

[1]) *Versl. en Mededeel.*, t. X; *Arch. néerl.*, t. XII.

[2]) Une erreur de calcul s'est glissée dans le résultat: le facteur 2π doit y être supprimé.

Si m et m_1 sont les masses des molécules choquantes, et φ et ψ les angles que les vitesses u et v font avec la droite joignant les centres des molécules au moment du choc (pris dans un sens déterminé), on a, d'aprés des formules connues, pour le carré de la vitesse de la masse m après le choc:

$$u'^2 = u^2 - \frac{4m_1}{(m+m_1)_2}(mu^2 cos^2\varphi - m_1 v^2 cos^2\psi - (m-m_1)uv\, cos\varphi . cos\psi).$$

Il s'agit de trouver la valeur moyenne de cette expression u'^2.

Toutes les valeurs de φ et de ψ ne peuvent pas se présenter lors du choc, mais il est facile de voir que si aucun choc n'a lieu pour certaines valeurs de φ et de ψ, le choc sera possible sous les angles $180° - \varphi$ et $180° - \psi$, et, réciproquement, que si le choc arrive avec les angles φ et ψ, il ne pourra pas se produire avec les angles $180° - \varphi$ et $180° - \psi$. Or, l'expression de u'^2 ne changeant pas lorsque φ et ψ y sont remplacés par $180° - \varphi$ et $180° - \psi$, il est clair que la valeur moyenne sera la même que si des chocs avaient lieu pour toutes les valeurs de φ et de ψ: la valeur moyenne d'une série de grandeurs n'est pas altérée, en effet, lorsque chacune d'elles n'y est prise qu'une seule fois, au lieu de deux.

La probabilité d'un choc ayant lieu sous les angles φ et ψ est $\frac{1}{4}\, sin\, \varphi .\, sin\, \psi .\, d\varphi .\, d\psi$, de sorte que, en indiquant les valeurs moyennes par un trait placé au-dessus des grandeurs, on a:

$$\frac{m\overline{u'^2}}{2} - \frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{mm_1}{2(m+m')^2}\int_0^\pi\int_0^\pi (m\overline{u^2}\, cos^2\varphi - m_1\overline{v^2}\, cos^2\psi -$$

$$- (m - m_1)\overline{uv}\, cos\,\varphi . cos\,\psi\, sin\,\varphi\, sin\,\psi\, d\,\psi\, d)$$

et

$$\frac{m\overline{u}^2}{2} - \frac{m\overline{u^{1\,2}}}{2} = \frac{2}{3}\,\frac{mm_1}{(m+m^1)^2}(m\overline{u^2} - m_1\overline{v^2}).$$

Dans le cas de la propagation du son, on peut simplifier en posant $m = m_1$; il en résulte:

$$\frac{\overline{mu_2^{\;2}}}{2} - \frac{\overline{mu_1^{\;2}}}{2} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{m\overline{u^2}}{2} - \frac{m\overline{v^2}}{2}\right)$$

et

$$\frac{m\overline{u_1^{\;2}}}{2} = \tfrac{2}{3}\frac{m\overline{u^2}}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{m\overline{u^2}}{2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{m\overline{v^2}}{2} - \frac{m\overline{u^2}}{2}\right).$$

Cette équation nous apprend $\left(\overline{v^2}\right.$, par exemple, étant supposé plus grand que $\left.\overline{u^2}\right)$ que, si des molécules ordinaires sont choquées par des molécules dont la force vive moyenne est plus grande, en moyenne $\frac{1}{3}$ de l'excès d'énergie est cédé aux molécules qui se trouvent dans l'état normal. Le reste est retenu par les molécules qui possédaient primitivement cet excès.

Dans l'hypothèse seulement où tous les chocs seraient centraux, l'excès d'énergie des molécules d'un des systèmes pourrait passer en entier aux molécules choquées.

Le cas dont nous avons à nous occuper est analogue à celui qui vient d'être considéré: les molécules qui arrivent de la plaque ont en moyenne une énergie plus grande que celle des molécules qu'elles choquent. Il est vrai que les deux espèces de molécules, au lieu d'être mêlées ensemble, comme on le supposait tout à l'heure, arrivent toujours les unes d'un côté, les autres du côté opposé; mais, pour la question de la valeur moyenne de l'expression

$$u_1^{\;2} = u^2 \sin^2 \varphi + v^2 \cos^2 \psi,$$

cette différence est sans influence, de sorte que nous avons encore:

$$\overline{u_1^{\;2}} = \tfrac{2}{3}\overline{u^2} + \tfrac{1}{3}\overline{v^2} = \overline{u^2} + \tfrac{1}{3}(\overline{v^2} - \overline{u^2}).$$

Le supplément d'énergie communiqué par le mouvement de la plaque à certaines molécules n'est donc pas retenu tout entier par elles après leur choc contre des molécules normales, et ne passe pas non plus intégralement à ces dernières; il se fait un partage de ce surplus d'énergie entre les deux sortes de molécules. Par là, il se forme une nouvelle couche de molécules,

qui possèdent plus d'énergie que les suivantes, et tandis qu'un second partage s'opére au profit de ces dernières, la couche, qui maintenant cède de l'énergie, en reçoit une nouvelle quantité de la couche précédente. De cette maniére, si les molécules atteintes par la plaque ont primitivement une composante commune dans une direction déterminée, la valeur de cette composante décroîtra continuellement, puisque la quantité constante de mouvement, dans la direction de cette composante, se répartit sur un nombre de molécules de plus en plus grand.

Tout en nous jugeant hors d'état d'analyser en détail le mouvement des molécules atteintes par la plaque, nous croyons pourtant avoir établi, dans ce qui précède, que l'énergie communiquée par la source vibratoire se diffuse, grâce aux chocs mutuels des molécules, dans leur masse tout entière. Mais cela est incompatible avec l'existence d'ondes d'une forme permanente, telles qu'on se les représente dans la propagation du son. La production de pareilles ondes exigerait que l'excédant d'énergie, qui existe dans une couche, pût être transmis en entier, lors du choc, à une couche suivante; c'est sur cette hypothèse que repose l'équation aux dérivées partielles universellement admise pour la propagation du son. D'après les considérations développées ci-dessus, cette tranmission d'énergie se ferait, au contraire, d'une manière analogue à la propagation de la chaleur dans les corps solides et à la diffusion des gaz; l'équation aux dérivées partielles, employée pour ces phénomènes, devrait donc servir aussi de base à la théorie de la propagation du son. Si l'on voulait alors introduire le mouvement périodique de la source vibratoire, le cas deviendrait analogue à celui de la distribution de la chaleur dans la terre, cas où la température de la terre est regardée comme une fonction périodique du temps.

Mais nous n'irons par plus loin dans cette voie, parce que les résultats auxquels nous parviendrions seraient en opposition avec tout ce qu'on sait de la propagation du son.

C'est, à notre avis, une grave objection à la nouvelle théorie des gaz, qu'elle n'ait pas su donner jusqu'ici une expli-

cation de la propagation du son, et nous regrettons que les hommes éminents, qui se sont occupés de cette théorie, n'aient pas appliqué leurs efforts à cette question. S'il était prouvé en effet que l'hypothèse, d'après laquelle les molécules gazeuses n'agissent les unes sur les autres qu'en se choquant comme des corps parfaitement élastiques, est impuissante à rendre compte de la propagation du son, il y aurait là sans doute une raison suffisante pour renoncer à cette hypothèse, quel que soit d'ailleurs le poids des considérations qui plaident en sa faveur.

Delft, décembre 1876.

Note additionnelle. Ce qui précède était déjà écrit, lorsqu'un extrait du Mémoire ci-dessus cité de M. Hoorweg a paru dans le n°. 4 des *Beiblätter von Pogg. Ann.* A cette occasion, l'auteur a apporté une modification à ses vues premières sur la relation entre la vitesse du mouvemont progressif des molécules de l'air et la vitesse de propagation du son, modification qui lui a été suggérée par une remarque de M. van der Waals. Au sujet de ces considérations nouvelles, je me contenterai de faire l'observation suivante.

Le potentiel du mouvement de l'air auquel donne lieu la vibration, suivant les lois du pendule simple, d'une petite sphère de rayon ϱ, est représenté par

$$\varphi = \frac{A \cos k\left(t - \frac{r}{v}\right) + B \sin k\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r};$$

l'auteur obtient ensuite pour le rapport des deux vitesses:

$$\frac{u}{v} = \frac{8\,B - 2\,A\,\pi}{A\,\pi - 2\,B},$$

et, en faisant $r = \varrho$, il trouve pour la vitesse de la petite sphère vibrante:

$$v' = A' \cos kt + B' \sin kt$$

où $A' = -A\left(\frac{k^2}{v^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right)$ et $B' = -B\left(\frac{k^2}{v^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right)$.

Arrivé là, il fait cette remarque singulière:

„Dans le cas de $B' = A'$ seulement, on obtient le mouvement que la source sonore doit avoir conformément à l'hypothèse en question" (celle du pendule simple).

Mais, pourrons-nous demander, l'expression

$$v' = A' (\cos kt + \sin kt)$$

représente-t-elle donc la vitesse d'un pendule simple, de sorte que la vitesse serait la même pour $t = 0$ et pour $t = \frac{1}{4}T$?

Si au contraire, ce qui semble mieux justifié, on pose A' ou $B' = 0$ pour représenter le mouvement du pendule simple, on trouve pour $\frac{u}{v}$, non pas la valeur 1,504 que donne M. Hoorweg, mais les valeurs absurdes -4 ou -2.

Delft, mai 1877.

CONTRIBUTION

à

L'HISTOIRE NATURELLE DES SALAMANDRES AQUATIQUES,

PAR

A. W. M. VAN HASSELT.

Depuis environ cent ans déjà, de nombreux naturalistes, suivant la voie ouverte par Spallanzani, ont pris les Salamandrides et autres Reptiles pour sujet d'observation et d'étude, à tel point même que ce champ de recherches pouvait sembler entièrement épuisé.

Très récemment, toutefois, la littérature de cette partie de la zoologie s'est de nouveau enrichie d'un mémoire plein d'intérêt, dû à M. Friedrich K. Knauer (*Beobachtungen an Reptiliën und Amphibiën in der Gefangenschaft*, Wien, 1875), et moi-même j'ai eu depuis plusieurs années l'occasion d'observer de temps en temps le *mode de vie* extraordinaire d'une espèce de ces animaux, et de constater ainsi quelques faits qui ne me paraissent pas entièrement dépourvus de valeur pour la solution de la question souvent controversée de la *durée de vie* des amphibies.

Une de mes parentes, aux bons soins de laquelle l'individu dont je vais parler est resté confié durant sa longue captivité, a bien voulu me faire à ce sujet une communication écrite, dont je commence par donner la traduction.

„Au mois d'Octobre 1859, mon beau-fils, qui se rendait aux Indes orientales, me pria de me charger de l'entretien d'un petit

„lézard”, qu'au mois de Mai précédent, en se promenant aux environs de Delft, il avait trouvé blotti dans la coque d'un marron d'Inde, et que depuis lors il avait élevé. Pour demeure il lui avait donné un bocal à poissons ordinaire, rempli à moitié de terre et de sable, et où il le nourrissait de lombrics. Je l'ai toujours laissé dans ce vase, en ayant seulement soin de renouveler parfois la terre, sur laquelle j'avais posé une petite motte de gazon, qu'en été j'arrosais de temps en temps de quelques gouttes d'eau, pour tenir l'herbe fraîche. Dans ces occasions, ou lorsque je retirais le lézard de son bocal — manœuvre à laquelle il se prêta bientôt docilement — pour le mettre un instant sur la table ou à terre dans le jardin, lui, qui dans sa cellule avait les mouvements tranquilles et lents, s'esquivait d'ordinaire avec beaucoup d'agilité, de sorte que j'avais fort à faire pour le rattraper. Une seule fois il parvint à s'échapper de sa prison, mais fut retrouvé, après de longues recherches, dans le foyer d'une cheminée hors d'usage. Pour nourriture je lui donnais exclusivement, tant que je pouvais me les procurer et en les cherchant même l'hiver dans les pots de fleurs ou les serres, de jeunes lombrics. Ceux-ci toutefois, pour être acceptés, devaient être parfaitement vivants. En hiver il restait souvent plusieurs semaines, — six au plus, — sans rien manger, car j'avais alors beau lui présenter, à défaut de vers, des insectes ou de petits morceaux de viande, jamais il ne voulait y toucher. Il se retirait alors aussi plus ou moins longtemps en terre, surtout lorsqu'il gelait fortement, et une fois même, dans un hiver très froid, il resta ainsi caché pendant au moins un mois et demi; en temps ordinaire, par contre, même à la fin de l'automne ou au premier printemps, il sortait presque toujours de la terre ou de l'herbe lorsque je remuais le sol avec une aiguille à tricoter, ou lorsque je secouais le vase ou le plaçais près de la lumière de la lampe. Jamais je ne l'ai vu boire au moment où j'arrosais l'herbe, et, bien que je l'aie souvent vu étendre et mouvoir la langue, je n'ai pu constater qu'il produisît quelque son. Je suis portée à croire qu'il m'entendait quand je lui adressais la parole, car il tournait alors la

tête et semblait me regarder. Aucun signe de croissance ne se manifesta chez lui; sa taille resta absolument telle qu'elle était lorsque je le reçus. Je n'ai pu apercevoir non plus le moindre changement de forme ou de couleur. Aux approches de la mue seulement il paraissait plus foncé, mais, aussitôt après, la couleur brun-verdâtre du dos et le jaune du ventre étaient beaucoup plus clairs. Le changement de peau se faisait régulièrement une couple de fois par an, jamais plus souvent. Une seule fois j'ai pu le bien observer; l'animal avait enroulé la peau de la tête sur le cou en un petit anneau noir-brunâtre, puis, comme quelqu'un qui retire avec peine les bras des manches de son habit, il fit sortir les deux pattes de devant, après quoi la peau continua à s'enrouler lentement vers l'arrière, et les pattes postérieures en furent extraites l'une après l'autre. Comment la peau glissa sur la queue, et ce que devint cette dépouille, que j'aurais voulu conserver, c'est ce que j'ignore. Lorsque, appelée hors de la chambre, je rentrai au bout de quelques minutes, la mue était entièrement terminée, mais la petite robe ne put être retrouvée nulle part. En tout, l'opération avait duré deux bonnes heures. Au printemps de 1875 a mue recommença, mais ne voulut pas s'achever. Elle marchait aussi irrégulièrement, se faisant tantôt ici, tantôt là. Partout des débris de peau, noirs et desséchés, restaient adhérents au corps, au cou, aux pattes et surtout à l'arrière de la queue, dont un petit bout tomba même avec un de ces anneaux de peau. L'animal, en outre, ne voulait ou ne pouvait plus prendre de nourriture: lorsque je lui présentais un petit ver, il happait toujours à côté, ou bien ne parvenait pas à l'avaler. Cet état dura jusqu'au mois d'Octobre de la même année, et l'animal maigrit de plus en plus; alors, de crainte que dans la saison froide il ne se cachât profondément en terre, selon son habitude, et ne s'y détruisît complétement, je me décidai à le noyer dans l'eau-de-vie, afin de pouvoir le conserver pour mon beau-fils."

Peu de temps après je reçus le „petit lézard" en question, pour le „monter" et le déterminer. Je reconnus seulement alors, — car antérieurement je l'avais bien vu plusieurs fois, *passim*, à

demi caché dans la terre ou dans l'herbe, mais jamais je ne l'avais tenu entre les mains, — que ce n'était *pas* un lézard [1]). Il n'appartenait même pas aux *Lacertinae*, qui vivent sur la terre, mais à la famille des *Salamandrida*, et, qui plus est, non aux Salamandres terrestres, mais aux Salamandres *aquatiques!*

C'est en effet un petit individu, à couleurs mal caractérisées, mais du reste suffisamment reconnaissable, d'une espèce très commune chez nous, le *Triton vulgaris* Linn., *cinereus* Merrem, *taeniatus* Schneider, ou *punctatus* Latreille, détermination qui a été confirmée par M. Snellen van Vollenhoven et par M. Horst.

Il reste seulement quelque doute quant au sexe, qui chez ces animaux, surtout à cette période de la vie, ne se laisse constater que difficilement, ou pas du tout, à la simple inspection extérieure, sans examen anatomique (la propriétaire de l'animal ne voulut pas m'autoriser à en faire la nécropsie). J'incline toutefois à croire que nous avons affaire ici à une femelle, attendu que Oken, d'accord en cela avec plusieurs autres auteurs, dit que „le *mâle* paraît rester *toujours dans l'eau; a terre*, du moins, on ne trouve que des *femelles*" [2]). Du reste, il y aurait bien aussi quelque raison d'admettre que notre exemplaire appartient au sexe mâle. Il possède en effet très distinctement une queue élargie ou aplatie latéralement. Or, à ce sujet, je trouve mentionné, également chez Oken (*loco citato*), que „chez la femelle la queue est *arrondie* (?), tandis que chez le mâle elle reste *large*". Cette assertion, toutefois, ne saurait être acceptée sans réserve. En général, du moins, il est reconnu, aussi par d'autres auteurs, que les Tritons, à la suite d'un long séjour à terre, peuvent subir des modifications remarquables dans la forme de certains organes. C'est ainsi que Duméril écrit: „que ces animaux éprouvent alors un changement très notable, tant pour les couleurs, que pour la conformation des parties, telles que les crêtes, les organes génitaux, les lobes

---

[1]) Dans le langage ordinaire, toutefois, on le désigne souvent sous le nom de „lézard d'eau".

[2]) Oken, *Allgemeine Naturgeschichte*, Amphibies, t. VI, p. 456.

des orteils et surtout la queue"[1]). Rien de ce genre, toutefois, n'a été noté chez notre individu, qui au contraire, après avoir quitté pour toujours l'élément humide, n'a pas montré le moindre changement de „forme ou de couleur". Et ce qui est surtout digne de remarque, c'est que les modifications en question, au moins pour ce qui concerne la forme de la *queue*, ne paraissent pas être aussi constantes que ne l'affirme Oken, ou que, en sens précisement inverse, Duméril ne l'indique dans le passage suivant: „Lorsque les Tritons sont restés longtemps hors de l'eau, leur queue *s'arrondit*[2]) et à peine peut-on reconnaître qu'elle avait été très comprimée". (*l. c.* p. 124). Le contraire, en effet, a eu lieu dans le cas actuel, puisque la queue, durant une si longue suite d'années, ne s'est nullement „arrondie", mais a conservé jusqu'à la fin la forme primitive, large et plate, de la queue du Triton.

L'observation assez remarquable, faite sur notre individu, de l'absence totale de variation, non-seulement dans la partie dont il vient d'être question, mais aussi dans toute la conformation extérieure, dans les couleurs et dans la taille, pourrait servir en outre, — si cela était nécessaire, — à prouver que dorénavant il n'est plus permis d'attacher la moindre valeur à cette conjecture, émise quelquefois à la légère: que dans la lente métamorphose de ces reptiles, le *petit* Triton, le *taeniatus*, ne devrait être regardé que comme représentant le jeune âge („*das junge Thier*", Leunis, *Synopsis der Naturgeschichte des Thierreichs*, 2e éd., p. 341) du Triton beaucoup plus *grand*, le *cristatus* Laurenti.

La thèse connue et souvent répétée, quoique non sans exagération, que les reptiles ont en général très peu besoin de nour-

---

[1]) Duméril, *Histoire naturelle des reptiles*, t. IX, p. 127. L'auteur ajoute encore: „Cette altération devient si notable, qu'elle peut mettre les naturalistes dans l'embarras pour savoir distinguer s'ils ont sous les yeux une *Salamandre* ou un *Triton*".

[2]) Devenant alors analogue à celle des véritables Salamandres, dites *terrestres* ou à queue *arrondie*. (*Ibidem*).

riture [1]), n'a pas non plus reçu de confirmation dans le cas actuel, c'est-à-dire pour le *Triton taeniatus* en particulier.

Pendant toute la durée de sa captivité, la plus longue période d'abstinence continue qu'on ait observée annuellement a été de six semaines, et pendant tout le reste de l'année on pouvait le voir dévorer avec avidité les différentes variétés de *Lumbricus terrestris* Linn. qu'on lui jetait.

Par contre, nos observations sont d'accord avec celles de M. Knauer, lorsqu'il dit ,,que les Salamandres tenues en captivité apprennent à connaître la personne qui les soigne et se laissent toucher sans fuir''; notre individu, en effet, tournait quelquefois la tête quand on lui parlait, et venait aussi parfois prendre, en quelque sorte dans la main, les petits vers qu'on lui présentait au bout de pincettes. Nous avons également reconnu l'exactitude de cette présomption de M. Knauer, que ces amphibies, ainsi que beaucoup d'autres, ,,ne boivent pas''. Mais lorsqu'il ajoute que, si ce besoin ne se fait pas sentir chez les grenouilles et les Salamandres aquatiques, c'est probablement à cause de la grande quantité d'eau qui entre par voie d'absorption cutanée, (*l. c.*, *p.* 34) cette explication est contredite par notre Triton, qui a vécu continuellement hors de l'eau.

Le même observateur des mœurs de ces animaux est aussi un peu à côté de la vérité en disant que, ,,une fois venus à terre, ils y vivent dans un demi-sommeil'' (*l. c.*, p. 51). La description donnée plus haut est loin de montrer notre *T. taeniatus* d'un naturel si paresseux. Il ne tombait même pas régulièrement dans le *sommeil d'hiver*, qui, dans les conditions de la vie libre, est propre aux amphibies. Sur ce point, il y a accord entre notre

[1]) Au sujet des genres voisins *Siren*, *Amphiuma*, *Proteus*, Oken écrit: ,,On sait qu'ils peuvent rester des *années entières* sans nourriture'' (*l. c.*, p. 432). Pour le *Rana esculenta*, voici ce que nous apprend M. Knauer: ,,Je conserve maintenant depuis plus d'un an deux grands individus sans les nourrir, dans un espace à moitié rempli de terre et presque complétement obscur, sans que j'aie pu, jusqu'à présent, constater quelque diminution dans le volume du corps de ces animaux (*l. c.*, p. 30).

observation et celles de M. Knauer, là où il dit que „tous nos reptiles, à l'état de captivité, peuvent être tenus éveillés pendant l'hiver, dans un local chauffé" (*l. c.*, p. 16); nous avons vu que tel a aussi été le cas, à part quelques semaines de froid rigoureux, pour le sujet de cette notice.

Aucun son vocal n'a été entendu chez notre Triton. M. Knauer enseigne aussi, au sujet de ces amphibies, que, à l'inverse des grenouilles, ils sont „presque entièrement muets" (*l. c.*, p. 18); chez les „Salamandres aquatiques" complétement développées, il n'y a, selon lui, nulle manifestation de „voix volontaire". Cette assertion est toutefois en contradiction avec celle d'Oken, qui parle expressément, et même à propos de chacune des trois principales espèces Européennes, de „glapissement aigu", de „claquement" et de „grondement" (*l. c.*, p. 455—457). L'émission de ces sons paraît ne pouvoir se faire que dans l'état jeune ou larvaire; à la surface de l'eau on voit alors monter quelquefois une bulle d'air, en même temps qu'on perçoit un „son sibilant faible" [1]; durant cette période, M. Knauer aussi a entendu quelquefois un „léger sifflement".

En ce qui concerne le changement de peau, notre observation ne s'éloigne pas des faits connus; seulement, on n'a pas vu au printemps l'animal opérer cette mue „tous les 2—8 jours" [2]), comme Oken l'affirme du *T. cristatus*, en ajoutant toutefois, très justement sans nul doute, „moins fréquemment après l'accouplement" (*l. c.*, p. 459).

Nous n'avons pas vu non plus „les conditions locales, la température, l'âge, etc." produire les „modifications variées dans l'acte de rénovation épidermique", dont M. Knauer fait mention comme d'un phénomène général (*l. c.*, p. 12). Notre Triton, en effet, tant dans son jeune âge que dans ses vieux jours, renouvela assez régulièrement deux fois par an son épiderme, jusqu'à ce que précisément

---

[1]) Voir l'article de M. Verster van Wulverhorst, *Iets over de Salamanders*, dans le *Jaarboekje van het Kon. Zool. Gen. Nat. Art. Mag.*, année 1859, p. 123.

[2]) La mue paraît en effet, mais spécialement à l'époque des amours, se répéter plusieurs fois, surtout chez les mâles.

une „modification" ou un trouble de cet acte devint la cause occasionnelle de sa mort. Pour expliquer la circonstance que, dans notre cas aussi, l'épiderme abandonné ne put être retrouvé, nous ferons remarquer que souvent les salamandres aquatiques avalent elles-mêmes cette dépouille. Plus d'une fois alors, on a vu celle-ci être rendue sans altération par l'anus, ou rester suspendue pendant quelque temps à cette partie du corps, ce qui jadis a conduit quelques-uns à l'opinion erronée que, chez les animaux en question, il se fait aussi une desquamation générale de la muqueuse du canal intestinal.

Mais, bien plus que dans les remarques précédentes, l'intérêt de notre petite observation réside dans la preuve qu'elle fournit de la possibilité du *séjour* CONTINU *de cette espèce de Triton hors de l'eau*, *et dans la connaissance de sa* LONGÉVITÉ *peu commune.*

1°. N'était-il donc pas connu que les salamandres aquatiques peuvent vivre un temps notable *à terre?* Oui et non. On savait bien que les Tritons, de même que d'autres amphibies, se rencontrent tantôt dans l'eau, tantôt à terre, et qu'ils y passent un temps plus ou moins long, mais pourtant, en somme, on les considérait plus spécialement comme des animaux *aquatiques.* C'est ainsi que M. Leunis, entre autres, dit que „les Tritons sont principalement *attachés* à l'eau" (*l. c.*, p. 299), bien qu'il ajoute, plus loin: „après la métamorphose ils *peuvent* aussi aller à terre" (p. 339). Duméril s'exprime encore plus catégoriquement à cet égard, en écrivant ,,que la plupart des espèces du genre *Triton* restent *habituellement* dans l'eau" (*l. c.*, p. 124). Oken se prononce à peu près dans le même sens: ,,les Tritons *se trouvent* dans l'eau stagnante ou faiblement courante; un petit nombre seulement se traînent plus tard à terre" (*l. c.*, p. 450). Quelques pages plus loin, toutefois, il limite le temps de la période aquatique, en disant ,,qu'ils vivent au moins tout l'*été* dans l'eau" (*l. c.*, p. 454). Il paraît aussi avoir eu connaissance de quelques cas exceptionnels d'un séjour ,,plus prolongé" hors de l'eau, comme le prouve le passage suivant: ,,beaucoup de femelles *s'égarent* aussi dans les caves, et *ne* retournent *plus* dans l'eau" (*l. c.*, p. 456). Mais il

néglige, tout comme Duméril (p. 124), de mentionner *combien de temps* les animaux se maintinrent sur cette fausse voie, en d'autres termes, pendant combien de temps le séjour extra-aquatique est compatible avec leur vie. La règle générale, en effet, quant au mode d'existence de ces amphibies, tel qu'il est décrit entre autres pour notre pays par M. Schlegel dans ses *Kruipende dieren van Nederland*, est qu'au moins les Tritons femelles (pour les mâles cela paraît beaucoup moins certain) quittent chaque année [1]), après la période d'accouplement et souvent dès le commencement de l'été, l'eau des mares, des fossés et des marais, pour *hiverner* [2]) à terre, dans des endroits frais, humides et sombres, par exemple dans les arbres creux, les pavillons de jardin, les trous de souris, ou sous la mousse, les feuilles d'arbres, les pierres, etc. Cette règle paraît s'appliquer à nos deux espèces indigènes, tant au *T. cristatus* qu'au *taeniatus*, bien que M. Verster (*l. c.*, p. 124) doute que toutes les femelles quittent l'eau en été, attendu qu'une fois il a pris au mois d'Octobre, dans un fossé, une vieille femelle de la seconde de ces deux espèces. Le même doute existait, quant au *T. Alpestris* Laurenti, chez Oken, car on lit dans son ouvrage (*l. c.*, p. 457): „lorsqu'on les retire de l'eau, ils se montrent très agités et courent rapidement dans tous les sens, pour tâcher d'y rentrer''. M. Knauer non plus ne paraît pas croire, surtout en ce qui concerne notre espèce, qu'elle puisse être conservée en vie, surtout hors de l'eau, aussi facilement que

---

1) On savait donc qu'ils peuvent *périodiquement* passer quelques mois hors de l'eau, mais on ignorait qu'ils le pussent, *sans interruption*, durant une suite d'années. C'est surtout en mettant ce dernier point hors de doute, que notre observation peut avoir quelque intérêt pour la zoö-biologie.

2) Après l'„hibernation'', au printemps, ils retournent dans l'eau, pour s'apparier. Voilà du moins ce que les livres donnent comme la règle générale. Ne faut-il pas entendre dans le même sens le passage de M. Schlegel (*l. c.*, p. 43), où il dit que les femelles de la *Salamandra taeniata* „quittent alors l'eau, pour vivre *ensuite* à terre''. Sinon, la priorité de notre prétendue découverte lui appartiendrait.

Duméril[1]) et d'autres l'affirment et que notre observation l'a péremptoirement démontré. Du moins, nous trouvons chez lui la remarque suivante (destinée toutefois plus spécialement à prouver que ces animaux n'ont pas „la vie aussi dure" qu'on le croit[2]): „J'avais très souvent lu que les Salamandres aquatiques peuvent passer *beaucoup de jours* hors de l'eau, et qu'en général elles se distinguent par une dureté de vie extraordinaire; mais ayant eu une fois plus de cent Tritons crêtés et rayés (*cristatus* et *taeniatus*) dans un réservoir, et une négligence leur ayant permis de s'échapper presque tous, à un petit nombre près qui restèrent dans l'eau, il me fut impossible de faire revenir à la vie un seul des animaux desséchés, bien que j'eusse découvert la fuite dès le lendemain et remis immédiatement dans l'eau les cadavres (*sic!*) rassemblés" (*l. c.*, p. 27).

2°. Et que savait-on jusqu'ici de la *longévité* des Tritons? Bien que, chez presque tous les auteurs qui traitent des Reptiles, on trouve noté que ceux-ci ont la vie non-seulement très dure, mais aussi très longue, le fait n'était pas encore prouvé pour les *Tritons*[3]). Comme hypothèse, applicable non-seulement aux vrais reptiles, mais aussi aux Tritons et aux amphibies en général, M. Knauer parle d'un demi-siècle! En considérant la grande différence

---

[1]) Celui-ci dit: „qu'ils sont très vivaces et qu'on peut les conserver en vie *facilement*" (*l. c.*, p. 121).

[2]) M. Knauer, ici et ailleurs, rapporte encore plusieurs autres exemples tendant à montrer que la soi-disant *dureté de vie*, dont les Reptiles et les Amphibies feraient preuve en présence d'influences extérieures nuisibles, n'est à beaucoup près pas aussi grande que les auteurs, se copiant les uns les autres, ne l'affirment.

[3]) Pour les Reptiles en général, je renvoie aux indications connues de Oken et autres auteurs, celle, par exemple, d'un *Siren lacertina* L., ayant vécu 6 *ans*, d'un *Proteus anguineus* Laur. de 8 *ans*, etc., etc. Ici, j'appelerai spécialement l'attention sur la remarquable Salamandre gigantesque, — le *Cryptobranchus Japonicus* V. D. Hoeven, — qu'on peut encore voir en vie dans un des bassins du Jardin zoologique d'Amsterdam, et qui, ayant été apporté du Japon dans notre pays par M. Siebold en l'an 1829, comme a bien voulu me l'apprendre M. Westerman, a atteint aujourd'hui un âge minimum de 47 *ans*.

qui dans cet ordre existe entre l'animal sortant de l'œuf et l'individu complétement développé, et à raison de la lenteur de l'accroissement, il croit ne pas être loin de la vérité en admettant collectivement," pour presque *tous* (?) ces animaux, une durée de vie d'au moins 50 *ans*" (*l. c.*, p. 17). Oken, tout aussi hypothétiquement, double ce chiffre: ,,Les amphibies," dit-il, ,,ont une vie très longue, qui, chez les *grandes* espèces, dure peut-être plus de 100 *ans*, et pendant *tout* ce temps ils paraissent continuer à croître" (*l. c.*, p. 422). Quant à ce dernier phénomène toutefois, il n'a pas été observé chez notre Triton.

En laissant de côté notre Salamandre gigantesque, ou *Salamandra maxima* de Schlegel, dont il vient d'être question en note, je ne trouve, quant aux Tritons en particulier, ni chez Oken, ni chez les autres auteurs cités, une preuve quelconque de longévité remarquable. Pour le *T. alpestris* seulement, M. Erber (*Die Amphibiën der Oesterreichischen Monarchie*, 1864, p. 711) rapporte, qu'on peut le conserver en vie pendant au moins 2 *ans*. M. Knauer non-seulement confirme le fait, mais nous apprend même qu'il possédait (en 1875) plusieurs individus de cette espèce qui avaient déjà atteint l'âge de 4 *ans* (*l. c.*, p. 31). C'est aussi cette espèce, ainsi que le *T. cristatus*, qui, d'après ses observations, „se conserve *le mieux* en captivité". L'auteur fait donc exception précisément pour notre *taeniatus*; celui-ci lui a paru beaucoup plus difficile à tenir en vie. La même chose m'a été communiquée par M. Westerman et par son adjoint M. Swierstra au sujet de nos Tritons indigènes, qui jusqu'ici n'ont pas voulu prospérer au jardin zoologique d'Amsterdam, et n'y ont guère supporté la captivité pendant plus de 3 *mois* [1]).

A en juger d'après l'ensemble des observations qui me sont connues, notre exemple de longévité du *T. taeniatus* est donc probablement, parmi les reptiles de petite taille, unique en son

---

[1]) N'aurait-on pas négligé, précisément parce que ce sont des Salamandres *aquatiques*, de leur fournir toujours l'occasion de sortir à volonté de l'eau et de se rendre à terre, pour s'y cacher à l'automne, suivant leur habitude?

genre. Si l'on considère, en effet, que l'animal mesurant environ 6 centimètres, avait acquis son plein développement lorsqu'il fut capturé et n'a pris depuis lors aucun accroissement nouveau, et si l'on se rappelle en outre que les Tritons (cela est au moins bien constaté pour le *cristatus*) ne sont tout à fait adultes et propres à la reproduction que dans la troisième année de leur existence, — on voit que le sujet de notre observation a atteint l'âge de 19 à 20 *ans!* (Pris en mai 1859, mort ou tué en octobre 1875, ce qui donne $16\frac{1}{2} + 3 = 19\frac{1}{2}$ ans).

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LES CAUSES

DES

FORMES ANORMALES DES PLANTES QUI CROISSENT DANS L'OBSCURITÉ,

PAR

N. W. P. RAUWENHOFF.

On sait depuis longtemps que les plantes placées dans l'obscurité, ou même dans un endroit mal éclairé, non seulement se décolorent, mais montrent encore d'autres changements remarquables. Les anciens traités de physiologie végétale, tels que ceux de Decandolle, de Meyen, de Treviranus, énoncent que, dans ces circonstances, les tiges deviennent généralement plus longues et les feuilles restent plus petites que d'ordinaire. D'ailleurs, qui n'a pas remarqué plus d'une fois ce phénomène sur les pousses que développent au printemps les pommes de terres conservées dans les caves?

En examinant les choses de plus près, on reconnaît toutefois que les plantes ne se comportent pas toutes de la même manière, lorsqu'elles se trouvent dans l'obscurité. Il y en a dont les tiges ne s'allongent que peu ou point au-delà de la mesure ordinaire; il y en a d'autres dont les feuilles, dans l'obscurité, ne restent guère en-deçà des dimensions des feuilles normales, formées à la lumière; bien plus, certaines feuilles s'allongent alors démesurément. On voit des fleurs et des fruits qui se parent des mêmes couleurs, également brillantes, à l'abri comme sous l'influence de la lumière; d'autres, dont le calice ou la corolle prennent un développement inusité en longueur, ou bien restent petits

comme les feuilles ordinaires; en un mot, aucune régularité ne semble plus présider à la végétation dans l'obscurité.

Les plantes soustraites à l'action de la lumière présentent des phénomènes si anomaux, qu'on serait tenté de croire qu'elles n'obéissent plus aux lois générales de la croissance, mais qu'elles déterminent tout-à-fait arbitrairement, chacune à sa manière, la grandeur relative et absolue de leurs organes.

Il n'entre pas dans mon plan de décrire en détail ces phénomènes. Ils sont bien connus, et je me contente de renvoyer le lecteur au mémoire de M. Sachs: *Ueber den Einfluss des Tageslichts auf Neubildung und Entfaltung verschiedener Pflanzenorgane*, publié dans la *Bot. Zeit.* 1863, *Beilage.* Les principaux faits de cet ordre y sont classés sous les titres suivants: Développement des feuilles ordinaires étiolées (p. 11 du tiré à part). Allongement des entre-nœuds étiolés (p. 14). Torsion (p. 16). Développement des fleurs (p. 17).

Sans insister sur ces faits, je crois devoir rappeler sommairement les essais d'explication qui en ont été donnés.

Hales avait déjà émis l'idée que, si les haricots croissant dans l'obscurité s'allongent outre mesure, c'est qu'ils restent plus longtemps mous et succulents. Decandolle fait dépendre le phénomène de l'assimilation. ,,Puisque les parties," dit-il (*Physiol. végét.* „III p. 1076), ,,qui combinent plus de carbone deviennent plus „dures, elles doivent tendre plus vite à ce degré de solidité qui „les empêche de s'allonger; par conséquent les végétaux fort „exposés à la lumière, s'ils sont plus durs, sont aussi propor„tionnellement plus courts et plus trapus; tandis que ceux qui „vivent à une moindre lumière ou même à l'obscurité, sont né„cessairement plus faibles, mais plus allongés."
M. Sachs, dans le travail ci-dessus cité, incline vers la même opinion. Il remarque très justement, que ce sont surtout les organes contenant de la chlorophylle qui changent de forme dans l'obscurité, et il lui paraît assez naturel de supposer que la lumière produit cet effet par l'intermédiaire de la chlorophylle elle-même; mais il ne saurait dire de quelle manière cela

a lieu. En effet, on connaît bien la fonction de la chlorophylle, qui est de produire de la fécule, et on sait que cette fonction est liée à la présence d'une certaine quantité de lumière, de sorte qu'on serait conduit à regarder le phénomène comme la conséquence d'un trouble de la nutrition (dû au manque de fécule et par conséquent de matériaux propres à la formation des parois cellulaires); mais cette explication ne conviendrait qu'aux organes étiolés qui restent petits. Elle ne rend pas compte de l'allongement excessif des tiges, et elle ne s'applique pas davantage au cas des plantes germées, chez qui les cotylédons eux-mêmes s'étiolent et se détruisent, bien qu'ils soient gorgés de fécule et d'autres substances nutritives.

Une étude spéciale des causes de ce phénomène a été faite pour la première fois, en 1869, par M. Kraus, qui en a communiqué les résultats dans un mémoire intéressant, inséré aux *Jahrbücher für wiss. Bot.* de Pringsheim, t. VII, p. 209—260.

M. Kraus arrive à la conclusion que l'étiolement est en réalité, comme l'avait présumé M. Sachs, la conséquence d'un dérangement dans la croissance des organes, occasionné par le défaut de matériaux ou de force pour l'agrandissement des parois cellulaires; ce dérangement, toutefois, n'avait pu être remarqué jusqu'alors, parce qu'on ne connaissait ni la nécessité de la nutrition des feuilles par des produits d'assimilation locale, ni le mode spécial de croissance des organes caulinaires qui se trouvent à un état de forte tension.

La feuille, suivant M. Kraus, ne reçoit de la tige que la quantité de matériaux nutritifs nécessaire pour l'amener au jour, après quoi elle doit suffire elle-même à son entretien: aux dents et près des nervures, bientôt aussi en d'autres points, la fécule se forme par assimilation dans la chlorophylle, et par là devient possible l'accroissement ultérieur de la feuille. Dans l'obscurité, au contraire, les feuilles s'arrêtent, par suite de l'absence de matériaux, au degré de développement auquel elles étaient parvenues en sortant du bourgeon.

Cette explication, toutefois, se trouve en défaut pour les

cotylédons de différentes plantes, lesquels cessent de croître dans l'obscurité, bien qu'ils soient encore tout remplis de fécule ou d'huile. Ici l'action de la lumière paraît être nécessaire pour transformer la fécule en cellulose. Quant à la nature de cette action, quant à savoir s'il s'agit d'une influence directe de la lumière, ou bien de l'intervention d'autres matières ou d'autres fonctions, également dépendantes de la lumière, nous sommes encore dans une ignorance absolue.

En contraste avec ce faible développement des organes foliaires, se présente le phénomène remarquable de l'allongement excessif de la tige dans l'obscurité. Pour apprendre à connaître le lien qui unit ces deux phénomènes, on doit porter son attention moins sur la grandeur de la tige que sur sa structure intérieure. On constate alors que la tige, quant à son évolution anatomique, s'est arrêtée, tout comme les feuilles, à un degré inférieur. Tant par rapport au nombre et au développement des faisceaux fibro-vasculaires, qu'en ce qui concerne le nombre et l'épaisseur des éléments de la moelle et de l'écorce, la tige étiolée et allongée offre l'image d'une jeune tige normale, qui n'aurait pas dépassé les premières phases de son développement.

Mais à quoi faut-il attribuer la longueur anormale de la tige étiolée?

Pour le démêler, M. Kraus a d'abord recherché si l'allongement est la conséquence d'un accroissement de longueur des cellules constituantes, ou bien d'une augmentation du nombre de ces cellules. Des mesures multipliées (moyen déjà essayé antérieurement par M. Sachs, mais sans succès) ont appris à M. Kraus que les cellules des entre-nœuds étiolés sont bien toujours, en moyenne, beaucoup plus grandes et notamment plus longues que celles des plantes vertes de la même espèce, mais que l'allongement ne saurait pourtant être rapporté exclusivement à cette cause. En partie, bien qu'en petite partie, il est dû aussi à la multiplication extraordinaire des cellules.

L'allongement anormal des cellules (l'accroissement insolite de leur nombre étant négligé) pourrait, suivant M. Kraus, s'opérer de la manière suivante:

Dans les jeunes entre-nœuds de la tige, à peine sortie du bourgeon, les divers tissus ont par eux-mêmes une longueur inégale : les périphériques (écorce et bois) sont plus courts, les centraux (moelle) plus longs ; s'ils paraissent, unis les uns aux autres, avoir la même longueur, c'est que les tissus les plus longs étirent les plus courts, jusqu'à ce qu'ils aient à peu près les mêmes dimensions.

Dans le cours de l'allongement de l'entre-nœud, cette différence ne s'efface pas, attendu que la moelle croît toujours plus rapidement que les autres tissus et devient par là, dans la première période de l'accroissement, la partie vraiment active de l'entre-nœud.

Peu à peu, toutefois, les éléments des anneaux ligneux et libérien commencent à épaissir leurs parois, prennent plus de solidité et opposent une plus grande résistance à la moelle, qui tend à les étirer. Cette dernière est alors entravée dans sa croissance longitudinale, et en quelque sorte soumise à une compression permanente par suite de la diminution d'élasticité des tissus lignifiés, de sorte que finalement c'est l'accroissement du bois et du liber, non celui de la moelle, qui détermine la longueur de l'entre-nœud.

Or, les tiges étiolées restent toute leur vie dans la première phase d'accroissement, dont il vient d'être question : les éléments du faisceau fibro-vasculaire n'épaississent pas leurs parois, du moins d'une manière sensible, et conservent ainsi, même à un âge avancé, un haut degré d'élasticité. La moelle au contraire, qui, à l'inverse des autres tissus, continue à croître dans l'obscurité, pourvu qu'elle reçoive suffisamment d'humidité, s'allonge incessamment et étire les autres parties, qui en conséquence sont allongées passivement au fur et à mesure. De là résulte, suivant M. Kraus, l'allongement anormal de la tige placée dans l'obscurité : la moelle détermine alors la grandeur définitive de l'entre-nœud, et cette moelle devient non-seulement aussi longue qu'elle pourrait le devenir étant soumise à l'insolation, mais elle atteint même, par suite du surcroît d'absorption, une longueur encore plus considérable.

Cette explication de M. Kraus, en ce qui concerne la tige, n'a été, que je sache, ni combattue ni confirmée par d'autres observateurs. Seul M. Ludwig Koch [1]), voulant connaître les causes de la verse des céréales, et ayant étudié pour cela les modifications que détermine dans la croissance des tiges du seigle la soustraction partielle de la lumière, a trouvé des résultats conformes à ceux des recherches de M. Kraus [2]).

Pour ce qui est des feuilles, au contraire, la théorie de M. Kraus a été rejetée par M. Batalin (*Bot. Zeit.*. XXIX, no. 40, 6 Oct. 1871).

Celui-ci regarde d'abord comme peu compatible avec cette théorie (suivant laquelle les feuilles étiolées ne peuvent croître parce qu'elles ne sont pas en état d'assimiler de la nourriture sur place, M. Kraus n'ayant en effet jamais rencontré de la fécule dans ces feuilles) le fait, que tant de cotylédons refusent absolument de se développer dans l'obscurité et meurent, bien qu'ils soient tout remplis de fécule. M. Kraus a lui-même senti cette difficulté, et il a supposé que dans ces cas la fécule ne peut se transformer en cellulose sans l'intervention de la lumière. Mais par cette hypothèse on ne fait que déplacer la difficulté, car il faut alors montrer la raison qui s'oppose dans ces cas à la formation de la cellulose aux dépens de la fécule préexistante, tandis que dans beaucoup d'autres cas (tels, par exemple, que le développement des bulbes, des tubercules, etc.) cette formation se fait bien dûment dans l'obscurité.

---

[1]) *Abnorme Aenderungen wachsender Pflanzenorgane durch Beschattung*, avec 4 pl. lith. Berlin.

[2]) Il donne des figures très expressives de la différence d'épaisseur des parois cellulaires dans le seigle couché et dans le seigle s'élevant vigoureusement, et il prouve que la verse des grains, si redoutée en agriculture, n'est pas due, comme on le croyait jusqu'alors, au manque de silice dans les chaumes, mais à l'insuffisance de la lumière à leur pied, par suite d'une croissance trop serrée; aussi est-ce surtout la portion inférieure du second entre-nœud qui fléchit ou se rompt, parce qu'elle est trop faible pour porter la charge du haut.

Une objection plus grave toutefois, selon M. Batalin, se présente, lorsqu'on considère les changements que subissent dans l'obscurité les feuilles des Graminées et d'autres monocotylédones. Dans ces circonstances, comme on sait, ces feuilles deviennent beaucoup plus longues que d'habitude, tandis que la largeur reste quelquefois la même, mais plus ordinairement est moindre que celle des feuilles croissant à la lumière. Le pouvoir de former de la cellulose existerait donc ici dans une direction, mais non dans la direction perpendiculaire, ce qui n'est guère admissible.

Enfin, l'explication de M. Kraus est aussi en désaccord avec l'observation que les plantes germantes étiolées contiennent en général moins de cellulose que les plantes normales du même âge.

M. Batalin a donc cherché une autre cause pour les phénomènes en question, et il est arrivé à conclure que la plupart des feuilles ne croissent pas dans l'obscurité parce que, dans ces conditions, les cellules ne se divisent plus; la grandeur de la feuille est en effet proportionnelle au nombre des cellules, et la feuille croît précisément dans la mesure où elle produit de nouvelles cellules. Voici comment M. Batalin a essayé d'établir cette proposition: La division des cellules se fait le mieux, comme on sait, à une lumière faible, qui n'est pas encore suffisante pour engendrer de la chlorophylle et provoquer l'assimilation. Prenant donc des plantes germantes qui s'étaient développées dans l'obscurité, il en exposa une partie pendant peu de temps ($1\frac{1}{2}$ à 3 heures) à une lumière diffuse très faible, tandis que le reste était laissé dans l'obscurité. Dans le premier lot, les petites plantes germantes continuèrent à croître régulièrement jusqu'à la chute des cotylédons; le limbe des feuilles était 4 à 7 fois, dans certains cas même 12 fois plus grand que celui des plantes soustraites à l'action de la lumière, bien que ces feuilles fussent restées tout à fait jaunes (le „jaune" de l'échelle chromatique de Chevreul), de sorte qu'il ne s'était pas formé de chlorophylle et que la multiplication des cellules avait seule été possible.

M. Batalin en conclut que la chlorophylle ne joue aucun rôle

dans le développement des feuilles, que celles-ci peuvent croître aux dépens des matières nutritives mises en réserve dans la graine, et que leur assimilation propre ne devient nécessaire que lorsque lesdites matières ont été consommées; que dans l'obscurité toutefois les feuilles cessent de croître, parce que les cellules sont incapables de se diviser, division qui s'opère déjà à une lumière de si faible intensité, que la formation de la chlorophylle, et certainement celle de la fécule, ne peuvent s'y effectuer.

La production de feuilles longues et étroites chez les Graminées étiolées trouve aussi, selon M. Batalin, son explication dans cette manière de voir. Ce qu'il rapporte à l'appui (l'existence, dans le parenchyme palissadé, de cellules en biscuit, qui seraient divisées dans les feuilles vertes, mais non dans les feuilles étiolées) me paraît toutefois peu convaincant.

En contradiction directe avec cette manière de voir est l'observation récente de M. Prantl (*Arbeiten des botan. Instituts zu Würzburg*, fasc. III, p. 384), qui a montré par des mesures spéciales que, chez la feuille qui se développe dans une obscurité complète, il se fait bien dûment un grand nombre de divisions cellulaires. Sur la largeur de la feuille primordiale d'un *Phaseolus* le nombre des cellules s'élevait, en effet, dans la graine non germée à 343, chez la plante étiolée de 1375 à 2571, chez la plante verte normale de 1429 à 2273.

On le voit, si la théorie de M. Kraus prête à des objections, celle de M. Batalin ne résiste pas non plus sous tous les rapports à un examen sévère. En ce qui concerne cette question, nous sommes encore dans l'incertitude sur beaucoup de points. M. Sachs déclare même dans la dernière édition de son Traité de botanique (*Lehrbuch der Bot.*, 4e éd., p. 805 et 807), qu'une explication complète de l'influence différente exercée par la lumière sur des organes végétaux divers, — explication qui montre comment, en chaque cas particulier, l'organisation d'une plante est modifiée de telle manière, et non d'une autre, par les vibrations de l'éther, — nous manque entièrement jusqu'ici, de sorte qu'il est à peine possible de présenter une théorie bien coordonnée

de la dépendance existant entre la végétation et la lumière. Reconnaissant la justesse de cette remarque, je ne me flatte pas de résoudre le problème en question. Mais, d'un autre côté, il ne faut pas oublier que les phénomènes de l'étiolement, si compliqués et si obscurs, pourront singulièrement contribuer, une fois bien connus et bien compris, à nous donner une idée d'une des fonctions les plus importantes de la vie végétale. Tout travail qui produit, relativement à ces phénomènes, un fait bien constaté, ou qui tend à épurer ou compléter les théories proposées, peut donc être considéré comme apportant une pierre pour la construction du futur édifice. C'est ce qui m'engage à soumettre les recherches suivantes, bien qu'elles ne fournissent pas une solution définitive, au jugement des botanistes.

Il y a déjà plusieurs années que ce sujet a attiré mon attention: en partie pour vérifier les faits signalés par M. Sachs en 1863, en partie parce que d'autres recherches m'y conduisaient, j'ai à différentes reprises cultivé des plantes dans l'obscurité et noté les phénomènes qui se produisaient. Comme mes résultats s'accordaient avec les descriptions données par M. Sachs, je ne jugeai pas nécessaire alors de publier mes observations. Avec un vif intérêt je pris ensuite connaissance du mémoire, ci-dessus cité, où M. Kraus essaie de pénétrer la cause de ces phénomènes; mais, quoique très prévenu en faveur de ce travail, je ne pus réprimer un doute sur quelques-unes de ses conclusions, de sorte que je résolus d'en contrôler l'exactitude. Ce sont ces recherches dont je vais rendre un compte succinct, en traitant séparément de la tige et des feuilles.

Changements de forme de la tige.

Dans l'examen des anomalies que présente la tige développée à l'abri de la lumière, deux points sont surtout à considérer, *l'allongement exagéré* et la *direction verticale* des entre-nœuds.

L'excès d'allongement dans l'obscurité est attribué par M. Kraus, comme nous l'avons vu, à l'excès de croissance de la moelle, combiné avec le développement imparfait des éléments du faisceau vasculaire et avec le faible épaississement de leurs parois. Quant à ce dernier phénomène, je dois donner pleinement raison à M. Kraus. Toujours j'ai trouvé dans la tige étiolée une différence de structure anatomique, qui rappelait un état moins avancé que celui correspondant à la dimension extérieure. Chez le *Rosa centifolia*, par exemple, j'ai étudié comparativement une branche verte et une branche qui avait crû dans l'obscurité. La première avait 7 entre-nœuds et 3 feuilles développées, la seconde 8 entre-nœuds et 5 petites feuilles; toutes les deux se terminaient en un bouton floral, qui dans la branche étiolée était plus long et plus mince que d'ordinaire. Tandis que la branche verte avait une longueur de 9 centim., l'autre atteignait une longueur totale de 49 centim., et était en outre, sur la section transversale, un peu plus épaisse que la première. Par contre, la structure interne montrait en elles un développement tout différent. Déjà à un faible grossissement, même avec la loupe, on reconnaissait dans la branche étiolée la moindre épaisseur du faisceau vasculaire, en même temps que l'étendue plus grande occupée par l'écorce et la moelle.

Les fig. 1 et 2 (Pl. VI) peuvent donner une idée de cette différence, mais elle s'accuse encore mieux par la mesure des parties constituantes d'entre-nœuds du même rang. A un grossissement de 20 fois, j'ai obtenu, comme moyenne de différentes mesures prises dans des directions diverses, les nombres suivants pour l'épaisseur des parties de l'axe sur la section transversale:

	Branche verte.	Branche étiolée.
diamètre de la branche.	41,3	47,5
parenchyme cortical	5,5	5,75
anneau vasculaire	5,2	4,5
moelle	20	27

les nombres représentent des divisions du micromètre oculaire.

Comme on le voit, la moelle et l'écorce sont ici notablement plus épaisses dans la branche étiolée, tandis que l'anneau des faisceaux vasculaires est au contraire plus mince. Chez le *Rosa*, comparé à d'autres plantes ayant crû dans l'obscurité, ces différences sont d'ailleurs relativement petites. Dans les entre-nœuds les plus âgés de la branche, les fibres du liber et du bois ne sont même guère moins épaissis chez la branche étiolée que chez la branche verte normale.

Des modifications analogues s'observent aussi dans la structure des tiges du *Phaseolus multiflorus*, lorsqu'on compare des plantes qui à partir de la graine ont végété dans l'obscurité, à d'autres de la même espèce qui ont crû à la lumière. Bien que les tiges blanches et brillantes des premières surpassent plusieurs fois en longueur celles des plantes vertes, et ne le cèdent pas non plus en diamètre, elles sont beaucoup moins développées à l'intérieur, et l'anneau ligneux notamment est dans un état moins avancé que celui de la plante normale. Mais les particularités offertes sous ce rapport par le *Phaseolus* ont déjà été décrites si souvent (entre autres par M. Sachs dans un mémoire spécial), qu'il paraît inutile de s'y arrêter plus longtemps.

Je traiterai plus en détail des modifications importantes que l'absence de lumière détermine chez le *Fuchsia globosa*. Lorsqu'on place au printemps un pied de cette espèce dans l'obscurité, les bourgeons d'hiver développent des pousses blanches et relativement longues, qui ne se portent pas, comme les jets normaux et courts de la plante verte, dans des directions diverses, dépendantes de la position du bourgeon et de la tige, mais qui sont au contraire toutes verticales. Quelquefois on peut même observer ce phénomène chez des Fuchsias qui ont passé l'hiver dans un coin peu éclairé de l'orangerie, et y ont bourgeonné aux premiers jours chauds du printemps.

Chez les plantes soumises intentionnellement à l'expérience, j'ai vu ces pousses blanches se développer jusqu'à une longueur de 15 à 18 centim., en moyenne avec quatre entre-nœuds, dont l'inférieur était toujours le plus long. Aux nœuds se formaient

de petites feuilles d'un jaune pâle, longues tout au plus de 2 à 3 millimètres. Les pousses apparaissaient d'abord au haut des branches de la plante. Plus tard, à mesure que les premières-nées commençaient à dépérir (ce qui dans chaque pousse avait lieu de bas en haut, et était reconnaissable au dessèchement et à la coloration brune des parties mourantes), de nouveaux jets se développaient successivement plus bas ou plus près de l'axe principal, jusqu'à ce qu'enfin, toute la réserve alimentaire étant épuisée, la plante entière succombât.

En comparant la structure anatomique d'une branche verte avec celle d'une branche étiolée du même âge, on trouve des différences marquées. La branche verte (vue sur la coupe transversale) présente: 1° un épiderme, 2° un parenchyme cortical de 6 à 7 rangées de cellules dans la direction radiale, cellules dont la rangée externe ressemble beaucoup quant à la forme et à la grandeur aux cellules de l'épiderme, tandis que celles du dedans deviennent peu à peu plus grandes et montrent des parois ondulées. Viennent ensuite les faisceaux fibro-vasculaires, rassemblés en anneau complétement fermé, et à rayons médullaires à peine visibles. En dehors, les faisceaux vasculaires touchent au parenchyme cortical par une rangée unique et fréquemment interrompue de fibres libériennes peu épaissies, à l'intérieur desquelles on trouve un parenchyme de petites cellules à parois minces et des vaisseaux cribreux à peine distincts. Le corps ligneux, entouré d'une très mince couche de cambium, se compose de séries radiales de vaisseaux et de cellules ligneuses assez épaisses, au nombre de 12 à 15 dans les rangées où manquent les vaisseaux. Pris en totalité, le tissu fibro-vasculaire a dans la direction radiale environ la même largeur que le parenchyme cortical. Enfin, la moelle forme un cylindre central de 10 à 14 cellules sur le diamètre de la coupe transversale, lesquelles cellules deviennent successivement plus grandes vers le centre, de sorte que les plus internes surpassent au moins trois fois en diamètre les cellules médullaires externes, celles qui touchent aux faisceaux vasculaires.

Notablement différente est la structure de la branche étiolée

du même âge. Celle-ci est plus épaisse sur la coupe transversale, mais, nonobstant ces dimensions supérieures, presque tous les éléments offrent un caractère de plus grande jeunesse. L'anneau ligneux surtout est moins développé, le nombre des cellules ligneuses est plus petit dans la direction radiale, et aucune trace de fibres libériennes épaissies n'est encore visible. Il est à remarquer en outre, que toutes les cellules du parenchyme, et spécialement celles de la moelle, qui atteignent d'ailleurs une grandeur inaccoutumée, sont très pauvres en contenu solide et organisé.

Les différences qui viennent d'être signalées ressortent du reste clairement des nombres ci-dessous, résultats moyens de mesures prises dans des directions différentes:

	branche verte.	branche étiolée.
épaisseur de la branche	1,7 à 1,9 mm.	1,9 à 2,2 mm.
épaisseur radiale de l'épiderme et de l'écorce primaire	50	54
nombre des rangées de cellules du parenchyme cortical, dans la direction radiale.	5—7	6—10
épaisseur radiale du faisceau fibro-vasculaire	38	29
diamètre de la moelle.	90	140
nombre des cellules médullaires sur ce diamètre	10—14	12—15
longueur des cellules médullaires. .	13—14	17—24
longueur des cellules du parenchyme cortical	26—27	27—43

le tout exprimé en divisions du micromètre oculaire, qui représentent une grandeur de 0,0067 mm.

Les différences sont encore plus frappantes chez deux branches un peu plus âgées, où la production du liége a commencé et où une partie de l'écorce est détachée.

La branche développée à la lumière montre ici, sous les débris de l'épiderme et des cellules les plus extérieures de l'écorce, une dizaine de rangées de cellules subéreuses (alternativement cubiques

et tabulaires) (voir fig. 5) formées par des partitions tangentielles de cellules-mères, immédiatement sous l'anneau interrompu des fibres libériennes, formation par suite de laquelle l'écorce primaire s'est entièrement subérifiée, a pris une couleur brune et est déjà tombée en grande partie. Sous l'enveloppe de tissu subéreux, on voit quelques rangées de cellules parenchymateuses assez larges, alternant avec des vaisseaux cribreux à parois déjà affaissées en grande partie, et çà et là un canal très ample, probablement rempli de matières sécrétées. L'anneau ligneux est composé de 15 à 20 séries radiales de cellules ligneuses assez épaisses, à section transversale carrée, entre lesquelles on voit dans certaines séries quelques trachées, placées en une rangée unique, près de la moelle; les séries de cellules ligneuses sont séparées par des rayons médullaires, consistant en une seule rangée de cellules, qui sur la section transversale diffèrent peu des cellules ligneuses.

Le passage de l'étui médullaire à la moelle est formé par un grand nombre de petites cellules irrégulièrement placées, dont les parois fortement épaissies se sont soudées entre elles, de sorte que l'ensemble offre l'aspect d'un collenchyme scléreux. Les cellules de la moelle même, successivement plus larges vers le centre, ont des parois médiocrement épaissies et à peine ponctuées.

Tout autres sont les caractères de la branche étiolée (voir fig. 6). Au même point que dans l'autre (à savoir immédiatement sous les quelques fibres libériennes), a commencé la production du liége, par suite de laquelle l'écorce primaire et l'épiderme, qui ici existent encore en majeure partie, sont subérifiés et colorés en brun. La couche subéreuse elle-même n'est composée que de 4 à 6 rangées de cellules (alternativement cubiques et tabulaires, quoique moins distinctement que dans la branche développée à la lumière), et passe insensiblement au phloème à parois restées minces, qui n'a pas plus d'une couple rangées de cellules d'épaisseur, et qui souvent ne se distingue presque pas du cambium auquel il doit naissance. L'anneau ligneux, de faible épaisseur radiale, ne contient pas

plus de 6 à 7 rangées de cellules et un très petit nombre de vaisseaux, à part ceux qui constituent l'anneau médullaire. Les cellules ligneuses sont plus larges que dans la branche normale, mais leurs parois sont moins épaissies, quoique tout aussi réfringentes. En dedans de l'étui médullaire, on trouve quelques cellules qui paraissent s'être divisées par des cloisons en plusieurs autres plus petites; c'est évidemment l'ébauche du tissu existant dans la partie correspondante de la branche normale, mais où l'épaississement des parois ne s'est pas produit. Enfin, la moelle est composée de cellules égalant en nombre celles de la branche développée à la lumière (10—14 sur un diamètre), et augmentant aussi en grandeur vers le centre; mais la largeur absolue des cellules étiolées est beaucoup plus considérable et leurs parois sont encore moins épaissies, tandis que la longueur absolue des cellules est au contraire la même dans les deux cas.

Les résultats moyens des mesures prises sur ces deux branches sont les suivants:

	branche normale.	branche étiolée.
Epaisseur radiale:		
de la couche corticale morte, subérifiée, repoussée par le liége . . .	22	24
de la couche subéreuse	38	15
du phloème	20	6
du xylème	40	22
du tissu situé entre l'étui médullaire et la moelle	16	11
Epaisseur totale de la moelle	70	126

le tout exprimé en divisions du micromètre oculaire.

Ces chiffres, de même que les figures 3 et 4, mettent pleinement en évidence les importantes modifications que l'absence de lumière peut déterminer dans les différentes parties de la branche de *Fuchsia*. Il est incontestable que la moelle prend ici dans l'obscurité un développement inusité; mais, de la comparaison des mesures relatives à la branche plus jeune et à la branche plus âgée, il paraît résulter que chez la branche étiolée

les cellules médullaires s'allongent d'abord plus que chez la branche normale, et qu'ensuite elles croissent principalement dans la direction radiale (probablement parce que l'épaississement des élements ligneux occasionne alors une trop grande résistance), de sorte que finalement la moelle de la branche étiolée se compose d'un plus grand nombre de cellules dans la direction de l'axe, cellules qui ne sont pas plus longues, mais beaucoup plus larges que les cellules normales.

Un autre exemple nous est fourni par l'*Impatiens tricornis.* De cette espèce, j'ai examiné de jeunes plantes germées qui avaient crû à l'air libre, et d'autres, du même âge, qui s'étaient développées sous une cloche de Sachs, au bichromate de potasse. Ces dernières avaient reçu moins de lumière, et cette lumière provenait exclusivement de la moitié la moins réfrangible du spectre. Bien que chez elles aussi les jeunes feuilles fussent devenues vertes, les phénomènes anomaux n'en étaient pas moins accusés par la circonstance que les jeunes tiges avaient atteint une longueur 2 à 3 fois plus grande que celles des plantes normales, et étaient par contre beaucoup plus minces.

Chez les plantes étiolées, la longueur de l'axe hypocotyle était de 30 mm. et celle du premier entre-nœud de 1 décim. La grosseur des tiges vertes dépassait assez notablement celles des tiges développées à la lumière jaune, pour que l'anneau ligneux des premières formât sur la section transversale un cercle aussi grand que la coupe entière des secondes. En mesurant les éléments de l'article hypocotyle, je comptai chez les deux plantes 8 à 9 rangées de cellules corticales entre l'épiderme et l'anneau de cellules amylifères entourant le cercle des faisceaux vasculaires; chez toutes les deux aussi, 13 à 16 cellules médullaires sur le diamètre de la coupe transversale. Chez toutes les deux enfin, 4 faisceaux vasculaires placés en croix, qui toutefois dans la plante verte commençaient à se différencier davantage. Quant aux dimensions, au contraire, les cellules parenchymateuses des deux plantes différaient considérablement.

Sur la coupe transversale on trouve, en effet:

	chez la plante normale.	chez la plante développée à la lumière jaune.
grandeur des cellules corticales	23-25 moy. 24	14-21 moy. 17
» » » médullaires	20-30 » 25	13-22 » 17

Sur la coupe longitudinale:

grandeur des cellules corticales	21-35 » 28	40-87 » 60
» » » médullaires	25-35 » 30	42-64 » 56

ce qui montre que dans le tissu formé sous l'influence des rayons jaunes, les cellules de l'écorce et de la moelle, mais surtout les premières, sont devenues beaucoup plus longues et plus étroites.

Dans le premier entre-nœud on retrouve les mêmes écarts entre les deux plantes; elles ont en général la même structure, mais chez la plante allongée tout est moins développé dans la direction transversale. C'est ainsi que l'épiderme a chez la plante normale une épaisseur de 4 divisions micrométriques, chez l'autre de 2; au-dessous, on voit chez la première 3 rangées de cellules de collenchyme, mesurant 10-12 div., chez la seconde 2 à 3 rangées de cellules non encore épaissies, mesurant 5 div.; viennent ensuite les cellules du parenchyme cortical, de dimensions très inégales, mais ordinairement plus grandes chez la plante verte. Les deux entre-nœuds ont chacun 10 faisceaux fibro-vasculaires, semblables de forme, mais moindres en grandeur et surtout en épaisseur des parois chez la plante allongée. Enfin on voit chez cette dernière 6-8 rangées de cellules médullaires, mesurant ensemble 45-70 divisions, et chez la plante verte 7-8 rangées, mesurant 90-100 div.; dans les deux cas il y a une cavité centrale, provenant de l'atrophie des cellules internes de la moelle et de l'accroissement prépondérant à la périphérie.

Sur la coupe longitudinale, toutefois, la différence est inverse. On trouve ici:

	chez la plante normale.	chez la plante développée à la lumière jaune.
longueur des cellules corticales	10-16 moy. 13	25-45 moy. 34
» » » médullaires	18-25 » 21	60-100 » 80

Le *Vicia Faba* m'a également présenté des changements très remarquables dans la structure des tiges soustraites à l'action de la lumière. Des graines germées de cette plante, développées comparativement dans l'obscurité et à la lumière, ne montrèrent pas seulement un parenchyme à cellules plus larges dans le premier cas, mais le nombre et la forme des faisceaux vasculaires étaient aussi modifiés notablement, comme on le reconnaît au premier coup d'œil jeté sur les fig. 7 et 8. Chez la plante verte, la base de la tige renferme 15 faisceaux vasculaires disposés en cercle et 4 à l'extérieur, appartenant à deux paires de feuilles; la moelle est déchirée au milieu et manque par suite au centre. La tige étiolée n'a au contraire que 6 faisceaux vasculaires placés en cercle, tous plus élargis dans la direction tangentielle et faisant saillie dans la moelle, laquelle est restée entière. Cette forme différente des faisceaux vasculaires sur la coupe transversale est peut-être imputable, d'une part à l'imperfection constamment observée du développement et de l'épaississement des éléments du faisceau vasculaire lui-même, d'autre part à la lenteur de l'accroissement de la moelle, comparé à celui des parties périphériques, phénomène qui est général chez les plantes à tiges creuses. Si, en effet, par suite de l'absence de lumière, d'un côté les faisceaux vasculaires conservent des parois minces, et de l'autre côté la moelle reste plus longtemps imbibée de sucs et vivante, il doit, dès que le caractère propre de ces tiges (celui de devenir creuses à une certaine époque par l'atrophie de la moelle) commence à se manifester par la diminution d'accroissement des cellules médullaires, en résulter une tension radiale, qui modifiera la direction des éléments encore flexibles du faisceau vasculaire. Sous ce rapport, le *Vicia Faba* fournirait donc un appui à la théorie de M. Kraus concernant l'influence de la moelle. Cette théorie ne saurait convenir toutefois aux entre-nœuds supérieurs, lesquels sont creux, tout comme dans les tiges vertes, quoique d'ailleurs considérablement allongés.

Les modifications de structure que subit dans l'obscurité le *Polygonum cuspidatum* ne sont pas moins dignes d'attention.

Comme on le sait, le rhizome de cette plante japonaise supporte très bien l'hiver dans nos jardins. Un pied placé en pleine terre ayant développé au printemps de jeunes tiges hautes de quelques centimètres, j'en introduisis quelques-unes dans des tuyaux de drainage en terre cuite, dont plusieurs furent successivement superposés l'un à l'autre à mesure que la tige grandissait, le dernier étant toujours couvert d'une grande coupe dont le bord embrassait celui du tuyau, de manière à maintenir la tige constamment dans une chambre obscure de hauteur suffisante. Ces tiges se développèrent ainsi concurremment avec d'autres nées du même rhizome vivace, mais, par suite de la soustraction de la lumière, les entre-nœuds déjà formés s'étiolèrent complétement et les nouveaux devinrent $1\frac{1}{2}$ à 2 fois plus longs que ceux des tiges vertes, tandis que les feuilles restèrent très-petites et de couleur jaune. Celles-ci étaient surtout peu développées en largeur, et avaient leurs bords roulés en arrière.

Lorsque les tiges tant vertes qu'étiolées eurent atteint leur accroissement complet, j'en fis des coupes à différentes hauteurs et les étudiai au microscope. On reconnaissait d'emblée qu'ici encore les faisceaux vasculaires de la plante étiolée étaient à un état de développement beaucoup moins avancé, tandis que leur nombre ainsi que l'épaisseur totale de la tige ne différaient pas très notablement dans les deux cas. L'épiderme et l'écorce primaire présentaient peu de différence sur la coupe transversale; sur la section longitudinale, on constatait que les cellules de l'une et de l'autre partie étaient plus allongées dans la tige étiolée. Par contre, les fibres libériennes épaissies et les cellules ligneuses, tout en ayant des parois beaucoup plus minces, n'étaient pas plus allongées que dans la plante normale. Les cellules médullaires s'étaient comportées comme le parenchyme cortical: de grandeur à peu près égale sur la coupe transverse, elles avaient dans la direction de l'axe longitudinal une longueur plus que double chez la tige étiolée. Quant au creusement de la tige par atrophie de la moelle, il paraît commencer un peu plus tard chez la plante étiolée, mais atteindre ensuite les mêmes proportions.

Du moins, un entre-nœud étiolé de 2,5 mm. de diamètre avait encore une moelle presque intacte; un article un peu plus âgé, de 5 mm. d'épaisseur, présentait une cavité centrale occupant environ le tiers de la coupe, mais plus petite que celle d'un article du même âge de la plante verte; enfin, dans les mérithalles tout à fait adultes, il n'y avait plus aucune différence sensible sous ce rapport.

Il est encore digne de remarque que les *noyaux cristallins*, qui chez la plante verte occupent des cellules de forme déterminée, tant dans l'écorce primaire que dans le phloème à parois minces et dans la partie périphérique de la moelle, manquent entièrement chez la plante étiolée; ce fait indique entre les deux plantes une différence chimique, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Les résultats des mesures (exprimés en divisions du micromètre oculaire, attendu qu'il ne s'agit pas ici de grandeurs absolues, mais seulement de grandeurs relatives) sont les suivants:

section transversale.	Tige verte.	Tige étiolée.
épaisseur radiale du faisceau vasculaire entier.	95	55
» » » phloème à parois épaisses.	16	8
» » » phloème à parois minces et du cambium. . . .	9	12
» » » xylème	55	22
» » de l'étui médullaire	20	13
grandeur des cellules médullaires	15,2	15
section longitudinale.		
longueur moyenne des cellules épidermiques .	5,5	13,5
» » » » corticales . . .	12,2	32,4
» » » » libériennes à parois épaisses.	90	89
» » » » ligneuses . . .	88	88
» » » » médullaires . .	29,5	62

Si ces chiffres établissent suffisamment la réalité de la différence brièvement décrite ci-dessus, un coup-d'œil sur les fig. 9 et 10 (Pl. VII),

qui représentent la coupe transversale d'un faisceau vasculaire de la tige verte et de la tige étiolée, et qui n'ont pas besoin d'autre explication, donne immédiatement une idée des modifications anatomiques occasionnées par l'absence de lumière.

Les mêmes phénomènes se produisent aussi dans les *tiges monocotylées*. Chacun les connaît chez l'*Asparagus officinalis*, dont les pousses printanières restent tendres et succulentes, en prenant un allongement considérable, tant qu'elles demeurent dans l'obscurité, mais deviennent bientôt vertes et plus ou moins ligneuses, lorsqu'elles sont exposées à la lumière. Comme autre exemple je citerai le *Tradescantia zebrina*. Des boutures bien enracinées de cette espèce, placées dans l'obscurité, se développérent presque exclusivement à la partie basilaire des entre-nœuds, ce qui était mis en évidence par des points préalablement marqués sur ces entre-nœuds, à des distances égales et rapprochées. Du reste, les parties formées dans l'obscurité se distinguaient immédiatement à leur couleur blanche et à leur épaisseur plus grande. En comparant leur coupe transversale avec celle des tiges vertes, je trouvai d'abord, chez les plantes étiolées, les cellules épidermiques et les quatre ou cinq rangées subjacentes de cellules parenchymateuses à parois beaucoup plus minces; la partie qui vient ensuite dans les tiges vertes, le cercle de une rangée de cellules épaissies, à parois colorées en jaune et plus épaisses, cercle qui unit les faisceaux vasculaires les plus périphériques, manquait entièrement. Le nombre des faisceaux vasculaires était le même de part et d'autre, et ils ne différaient pas beaucoup non plus par le nombre de leurs éléments; de part et d'autre aussi on ne trouvait ordinairement que 1 ou 2 grands vaisseaux spiraux, mais, quant à la consistance et à l'épaisseur, tant des éléments du bois que de ceux du liber, il y avait une différence sensible. La supériorité de consistance était encore plus prononcée, chez la tige verte, pour les parois des cellules de la moelle, qui étaient évidemment plus tendues que les cellules médullaires, souvent à parois ondulées, de l'entre-nœud étiolé.

Bien qu'il y eût dans les deux cas des inégalités considérables sous le rapport des dimensions des différentes cellules médullaires, des cellules grandes et petites alternant toujours entre elles, je constatai pourtant, par des mesures multipliées, qu'en moyenne la taille, aussi bien que le nombre des cellules, était un peu plus grande dans la plante étiolée. Chez celle-ci, en effet, je trouvai sur le diamètre de la coupe 22 cellules, mesurant en moyenne 19 divisions du micromètre; chez la tige verte 19 cellules, mesurant en moyenne 17 divisions; l'épaisseur plus grande de l'entre-nœud étiolé (30 millimètres, au lieu de 23 comme chez la plante verte) est donc entièrement expliquée par les dimensions du tissu fondamental interne. Sur la coupe longitudinale, les cellules en question ne diffèrent pas sensiblement en grandeur.

Chez le *Spironema fragrans* on observe également, après que la plante est restée quelque temps dans l'obscurité, un allongement considérable de la tige, les entre-nœuds formés ayant 4 à 5 fois la longueur des parties normales. L'épaisseur de ces entre-nœuds étiolés est toutefois moindre que celle des tiges vertes.

Enfin, un exemple remarquable des anomalies en question nous est encore offert par le *Fritillaria imperialis* croissant dans l'obscurité.

Le long du côté septentrional d'une des serres du jardin botanique de notre Université, se trouve une ligne de bulbes de cette Liliacée, qui passent l'hiver en pleine terre et poussent chaque année leurs tiges aériennes normales. Au printemps de 1875, dès que les jeunes plantes s'élevèrent à quelques centimètres au-dessus de terre, une couple furent recouvertes chacune de deux larges tuyaux de drainage, superposés l'un à l'autre et bien adaptés par le collet, puis l'ouverture du haut fut fermée par une grande coupe en terre, dont le bord recourbé embrassait le bord supérieur du tuyau. La plante, maintenue en pleine terre, était ainsi placée dans une chambre obscure, qui, de même que pour le *Polygonum* (voir ci-dessus p. 315), pouvait au besoin être exhaussée, au moyen de tuyaux supplémentaires; elle y trouvait une humidité suffisante et un air suffisamment renouvelé pour pouvoir se développer parallèlement à la plante qui végétait

à l'air libre, à côté d'elle. La preuve que cela avait réellement eu lieu fut obtenue, lorsque, le 9 mai, les deux plantes voisines, développées l'une à l'abri et l'autre sous l'influence de la lumière, furent coupées et soumises à l'examen. Toutes les deux étaient en pleine floraison; tous les organes se montraient bien développés, les fleurs de grandeur normale, avec des étamines et des pistils bien constitués. Seulement, les couleurs du périanthe étaient moins vives, la tige plus longue, les feuilles moins nombreuses et plus étroites chez la plante qui avait vécu dans l'obscurité.

Les dimensions de la plante étiolée et de la plante verte étaient les suivantes:

	plante verte.	plante étiolée.
grosseur de la tige à la base.	2,3 centim.	2,3 centim.
» du pédoncule.	1,1	1,0
longueur de la tige depuis le pied jusqu'à la première feuille.	18	29
» depuis la première feuille jusqu'à la dernière	46	52
» du pédoncule	43	44
donc, longueur totale de la plante. . .	107	125
longueur de la feuille inférieure	16	12
largeur de la même	5	4,5
longueur d'une des feuilles supérieures.	16	16
largeur de la même	2,5	1,0
longueur des feuilles de la couronne qui surmonte les fleurs:		
feuille la plus grande	13	11
» » » petite	7	10
largeur de ces feuilles:		
feuille la plus grande	1,5	1,8
» » » petite	0,7	1,0
nombre total des feuilles au-dessous des fleurs	65	35
» des feuilles de la couronne . .	26	13
» des fleurs	7	4

On voit clairement par ces chiffres que, si la plante développée dans l'obscurité était un peu moins vigoureuse que la plante verte, tous les organes y existaient pourtant dans un état en apparence normal; le *Fritillaria* fournit donc un exemple frappant de ce fait, que la lumière n'est pas nécessaire à la croissance et à l'épanouissement, lorsque les organes, ainsi qu'il arrive généralement chez les plantes bulbeuses, sont déjà ébauchés dans le bourgeon.

L'étude anatomique dévoila toutefois, dans ce cas aussi, différentes anomalies.

Sur la coupe transversale de la base de la tige on voit un grand nombre de petits faisceaux vasculaires, qui existent jusqu'au centre (de sorte que la tige n'est pas creuse), et dont l'ensemble est entouré extérieurement d'un anneau continu de 6—10 couches de petites cellules épaissies (*Schutzscheide*, *Gefässbündelscheide* des Allemands, gaîne des faisceaux vasculaires). Cet anneau est limité à son tour par environ six rangées de grandes cellules ellipsoïdales, entre lesquelles sont disséminés de larges canaux aériens, et le tout est enveloppé d'un épiderme à parois plus épaisses à l'extérieur.

Cette structure se retrouve à la fois dans la tige étiolée et dans la tige verte, mais chez celle-ci les couches cellulaires externes contiennent de la chlorophylle, et tous ses éléments ont généralement aussi des parois plus épaisses; c'est ainsi, par exemple, que les cellules du tissu fondamental y sont des cellules ponctuées, ce qui n'est pas le cas chez la tige étiolée.

La gaîne des faisceaux vasculaires, formée chez la tige verte de 8—10 rangées de cellules très épaissies et mêlées de canaux ponctués, ne renferme chez la tige étiolée que 4—6 rangées de cellules beaucoup moins épaisses. Le même caractère se retrouve dans le faisceau vasculaire lui-même: bien qu'il soit composé dans les deux tiges des mêmes éléments, le nombre et l'épaississement des vaisseaux sont moindres chez la tige étiolée. De là vient que celle-ci, qui est d'un blanc clair, se laisse couper beaucoup plus facilement que la tige verte.

Les cellules épidermiques ne diffèrent pour ainsi dire pas; sur les deux tiges on trouve de grands stomates, distribués avec parcimonie et remplis de grains de fécule, qui, chez la tige étiolée, sont même encore plus nombreux et plus grands. La coupe longitudinale des deux tiges n'offre pas non plus de différences notables, si ce n'est que les cellules du parenchyme sont en moyenne un peu plus longues et à parois moins épaisses dans la tige étiolée. Les vaisseaux sont toujours principalement des vaisseaux spiraux.

L'épiderme des feuilles possède dans les deux cas des stomates, pareils en nombre et en grandeur. La chlorophylle manque bien entendu chez la tige étiolée, mais non la fécule. Les cellules épidermiques elles-mêmes sont, dans cette tige, beaucoup plus étroites (quelquefois seulement moitié aussi larges) et un peu plus longues.

Le pédoncule montre chez les deux plantes la même structure que la tige feuillée, en même temps que des différences analogues entre celui qui a crû à la lumière et celui qui s'est développé dans l'obscurité; enfin, le même type se retrouve encore, bien que simplifié, dans le pédicelle. Le tissu parenchymateux sous-épidermique est abondamment pourvu de chlorophylle chez la plante normale, complétement incolore chez la plante soustraite à la lumière; au-dessous de ce tissu se trouve chez toutes les deux l'analogue de la gaîne des faisceaux vasculaires, qui chez la plante étiolée se distingue à peine du parenchyme extérieur, tout aussi peu épaissi. Bien que les deux pédicelles aient à peu près la même grosseur, le nombre des faisceaux vasculaires de la coupe transversale est de 34 dans le pédicelle normal et seulement de 25 dans l'autre, outre que les éléments vasculaires sont beaucoup moins épaissis.

De tous les exemples qui viennent d'être décrits, on peut tirer la conclusion que, lorsque les tiges des plantes se développent dans l'obscurité, l'épaississement des parois cellulaires fait généralement plus ou moins défaut, ou reste imparfait. En réalité,

cela s'applique à tous les tissus de la plante; c'est ainsi, par exemple, qu'on voit dans l'état normal une partie du parenchyme cortical former du collenchyme, ce qui chez les plantes étiolées ne se fait qu'incomplétement ou pas du tout. Mais la différence en question s'accuse le plus dans les éléments à parois normalement épaisses du faisceau fibro-vasculaire. Chez celui-ci, à l'état étiolé, les organes élémentaires sont ordinairement moins nombreux et moins différenciés, de sorte que l'ensemble présente un caractère de développement imparfait, de jeunesse relative, sans toutefois ressembler entièrement à la tige normale prise à un âge moins avancé.

D'après le résultat de mes recherches et de mes mesures, je dois donc donner raison à M. Kraus, lorsqu'il déclare que la tige étiolée se trouve anatomiquement à un degré plus bas que celui de la tige normale et verte du même âge.

Les résultats obtenus par M. Koch, sur des tiges de seigle soustraites partiellement à la lumière, sont en parfait accord avec cette affirmation. ,,Lorsque des organes caulinaires se développent à l'ombre'', dit-il, ,,l'épaississement de leurs cellules est entravé'' (*l. c.*, p. 9); ses figures montrent clairement aussi cette différence.

Où faut-il maintenant chercher la cause de ce phénomène?

M. Kraus (*l. c.*, p. 241) attribue la minceur des parois des cellules épidermiques et collenchymateuses des tiges étiolées à l'absence de la matière colorante de la chlorophylle, vu que les grains chlorophylliens jaunes, non éclairés, sont incapables d'assimilation. Le non-épaississement des éléments des faisceaux vasculaires est, suivant lui, la conséquence des faibles dimensions qu'atteignent les feuilles, attendu que dans l'état normal cet épaississement des parois du faisceau fibro-vasculaire commence tard, lorsque déjà les feuilles les plus rapprochées sont à peu près adultes.

Cette explication ne me paraît pas fondée, car, en premier lieu, l'épaississement des parois fait aussi quelquefois défaut dans la moelle (voir, par exemple, ma description du *Fuchsia globosa*, p. 308), bien que celle-ci à l'état normal ne contienne pas de

chlorophylle. M. Kraus lui-même a senti la faiblesse de son argument; il remarque, en effet, qu'on lui objectera peut-être que dans le collenchyme, précisément à l'époque où il s'épaissit et encore longtemps après, on ne peut constater la présence de la fécule dans les grains de chlorophylle ; puis il essaie de lever la difficulté en supposant gratuitement que la fécule est consommée à mesure qu'elle se forme. D'un autre côté, l'explication de M. Kraus est contredite par le fait que, dans plusieurs de mes observations, les cellules du parenchyme cortical et les cellules de l'épiderme étaient, tout comme celles de la moelle, plus développées qu'à l'ordinaire. Je serais donc porté à voir ici un effet, non pas tant du défaut de matières propres à la nutrition, mais d'une modification du processus vital, par suite de l'absence du stimulant de la lumière. Peut-être certaines matières, nécessaires à l'épaississement des parois des cellules existantes, cessent-elles alors de se former. A cet égard, toutefois, on ne saurait encore rien dire de certain. En tout cas, le manque de matière colorante chlorophyllienne ne peut être un obstacle général à l'épaississement des parois, car comment se formeraient alors les tissus parfois considérablement épaissis de tant de racines et de rhizomes? L'explication de M. Kraus me semble donc inadmissible, bien que je n'en aie pas de meilleure à mettre à la place.

En même temps que la différence de structure anatomique, dont il vient d'être question, on observe en beaucoup de cas un *allongement anormal de la tige étiolée.* A quoi celui-ci est-il dû? M. Kraus en a donné, comme nous l'avons vu, une explication qui paraît très simple et très rationnelle. Dans ses recherches antérieures sur la tension des tissus (*Bot. Zeit.*, 1867), il avait trouvé que lors du développement des entre-nœuds la moelle est en avance sur les parties plus extérieures, qui par suite sont plus ou moins étirées. A cette extension dans la direction de l'axe longitudinal une limite est bientôt posée, dans l'état normal, par l'épaississement des parois des divers éléments de l'écorce et surtout du faisceau vasculaire, de sorte que la

moelle est ensuite plus ou moins retenue par la résistance des cellules de la tige, épaissies et à développement plus lent. Mais dans la tige étiolée, où, comme nous l'apprend la structure anatomique, cet épaississement des parois ne se fait pas, la moelle a libre jeu et atteint alors non-seulement la longueur entière, qu'elle prendrait dans l'état normal si elle n'était pas retenue par d'autres éléments, mais une longueur encore plus grande, parce que les cellules médullaires s'allongent surtout par l'absorption d'eau.

De cette manière il est rendu compte, semble-t-il, du fait connu, que les cellules médullaires de la tige étiolée sont plus longues que d'ordinaire, et l'explication est aussi d'accord avec les expériences de M. Sorauer (*Bot. Zeit.*, 1874), d'après lesquelles la moelle croîtrait en longueur rien qu'en absorbant de l'eau. M. Kraus s'est ensuite demandé si l'excès de longueur des cellules médullaires suffit seul à expliquer l'allongement de la tige étiolée, en d'autres termes, si l'allongement des cellules de la moelle est en rapport direct avec celui de la tige. Plus heureux que M. Sachs, — qui à cause de la grandeur très inégale des cellules du même tissu n'avait pu arriver à un résultat certain, — il a trouvé que le surallongement des cellules de la moelle expliquait bien en grande partie, mais non complétement celui de l'entre-nœud, d'où il conclut que les cellules doivent aussi se multiplier plus qu'à l'ordinaire. Les observations de M. Batalin ont confirmé cette conclusion, et moi-même j'ai obtenu des résultats analogues, que je juge toutefois inutile de rapporter, vu leur conformité avec ceux de mes devanciers.

Suivant la manière de voir de M. Kraus, la moelle est donc l'agent actif de l'allongement exagéré de la tige dans l'obscurité, et cet allongement dépend de la différence de tension entre les couches de tissu internes et externes. Cela est en harmonie avec le fait que les tiges volubiles et grimpantes, chez qui la tension des tissus est extrêmement faible, conservent dans l'obscurité leur longueur normale. Il suit en outre, de cette manière de voir, que là où la moelle manque, l'allongement inusité doit aussi cesser de se produire. M. Kraus n'a pas examiné ce point, mais les résul-

tats obtenus par M. Koch, sur des pieds de seigle recevant une lumière insuffisante, m'avaient déjà fait douter que l'explication de M. Kraus fût applicable en ce cas.

Pour éclaircir ce doute, j'ai étudié expressément la manière dont quelques plantes à tiges creuses se comportent dans l'obscurité. Les résultats de ces expériences ont été donnés ci-dessus, p. 312 pour *Impatiens*, p. 316 pour *Polygonum cuspidatum*, et p. 307 pour *Phaseolus multiflorus.* Dans tous ces cas, il y eut surallongement de la tige, et, comme le montrent les mesures du *Polygonum*, non-seulement le petit nombre de cellules médullaires déjà formées, mais aussi et surtout les cellules de l'écorce et de l'épiderme avaient acquis par l'étiolement une longueur plus que double. L'*office actif*, dans ces cas, ne doit donc pas être attribué exclusivement à la moelle, mais *pour le moins au même degré aux cellules de l'écorce.* Tout au plus pourrait-il être question de la moelle comme agent actif dans la phase de première jeunesse, à raison du fait que chez la tige étiolée la moelle reste plus longtemps vivante, et par conséquent la cavité centrale de la tige atteint un peu plus tard la grandeur normale (voir ci-dessus, p. 315). Du reste, cet allongement exagéré des cellules corticales se montre aussi ailleurs, par exemple chez le *Fuchsia* (p. 309) et l'*Impatiens tricornis* (p. 313); en tant qu'il s'agit de distinguer dans la tige une partie s'allongeant activement et une autre s'allongeant passivement, je voudrais donc regarder comme partie active non-seulement la moelle, mais tout le tissu fondamental (*Grundgewebe* de Sachs). Cela serait aussi d'accord avec les résultats fournis par les tiges monocotylédones, chez lesquelles, surtout dans les cas où les faisceaux fibro-vasculaires s'étendent jusque dans la partie centrale, on ne saurait parler de moelle proprement dite. Cet accroissement énergique du tissu fondamental peut d'ailleurs consister, soit dans l'allongement des cellules suivant la direction de l'axe végétal, ce qui est le cas ordinaire, soit dans leur développement dans le sens perpendiculaire à cet axe, lorsque, comme chez le *Tradescantia zebrina*, la tige s'épaissit par l'étiolement.

La théorie de M. Kraus, attribuant la longueur anormale de la tige placée dans l'obscurité à l'accroissement exagéré de la moelle, combiné avec le faible épaississement des organes élémentaires du faisceau vasculaire, conduit à penser que chez les tiges étiolées la *tension* doit être moindre que chez les tiges normales, sans toutefois devenir nulle. M. Kraus (p. 240 de son Mémoire) rapporte à cet égard quelques données numériques, qui montrent que la tension est réduite dans les organes étiolés à environ la moitié de sa grandeur ordinaire, et quelquefois à moins. A ce même point de vue, il remarque que les tiges où il n'existe pas de tension à l'état normal, celles du *Cucurbita* par exemple, ne montrent pas non plus de surallongement dans l'obscurité, fait que j'ai vu moi-même chez l'*Ipomaea*.

Relativement à cette tension je n'ai d'ailleurs rien de nouveau à communiquer, n'ayant pas fait d'expériences spéciales à ce sujet. Je dois seulement déclarer avoir plus d'une fois observé une tension évidente dans les parties étiolées de *Phaseolus*, *Fuchsia*, *Rosa*, *Polygonum*. Quand on détachait l'épiderme, celui-ci se courbait souvent tout autant que chez les plantes normales. A l'appui de cette assertion, rappelons aussi l'intéressante expérience de M. Duchartre (*Comptes rendus*, t. LXI, p. 442), répétée avec le même résultat par M. Hugo de Vries (*Arbeiten d. botan. Instituts zu Würzburg*, III, p. 328), suivant laquelle la tige du *Dioscorea Batatas* ne s'enroule pas dans l'obscurité prolongée, mais s'élève droite le long du tuteur, jusqu'à une hauteur de $1^m,3$ à $1^m,5$. Nous avons ici un exemple d'une tension encore plus forte dans l'état étiolé que dans l'état normal.

M. Famintzin, en étudiant la germination du *Lepidium sativum* (*Mélanges biologiques*, St. Pétersbourg, t. VIII), a trouvé que les racines des petites plantes maintenues dans l'obscurité restaient plus courtes que celles des pieds croissant à la lumière, et cela, à ce qu'il pense, d'une quantité précisément telle, que la somme des longueurs de la racine et de la tige serait égale chez les plantes étiolées et chez les plantes vertes du même âge. Depuis, il a confirmé ce résultat par un grand nombre d'observations

(*Bot. Zeitung*, 1873, p. 367). Ayant fait germer 40 graines à la lumière et un nombre égal dans l'obscurité, il mesura chaque jour séparément la longueur de l'axe hypocotyle et celle de la racine. Pendant 7 jours, la moyenne de chaque série de quarante mesures donna un résultat conforme à la conclusion ci-dessus énoncée. A partir du huitième jour seulement, les sommes présentèrent un écart notable, parce qu'à ce moment les plantes germées dans l'obscurité cessèrent de croître.

Sans vouloir en rien contester l'exactitude de ces résultats, qui d'ailleurs ont été vérifiés par M. Lasareff (Just, *Botan. Jahresber.*, II, p. 775), je crois que l'équivalence des sommes en question (à laquelle M. Famintzin attache de l'importance, mais qu'il ne peut expliquer), ne saurait jeter de jour sur la question qui nous occupe.

Si la relation susdite entre la longueur de la tige et de la racine s'observait chez les plantes étiolées de tout âge, ce serait à coup sûr, vu le mode compliqué et dissemblable de nutrition et d'accroissement de ces organes, un phénomène extrêmement remarquable, qui mériterait bien, en le supposant constant et non accidentel, de faire l'objet d'un examen approfondi. Mais cette égalité des sommes des longueurs n'a été constatée pour l'axe hypocotyle et la racine primordiale que dans les premiers jours de la vie, c'est-à-dire, pendant la période où les deux organes sont nourris exclusivement aux dépens des matériaux de réserve de la graine. Ces principes nutritifs, provenant d'une seule et même source, étaient alors conduits, tant que la masse emmagasinée y suffisait, soit plus vers le haut, dans l'axe hypocotyle, soit plus vers le bas, dans la racine; ils l'étaient en quantité plus grande dans l'axe hypocotyle, quand l'accroissement vernal de celui-ci était soustrait à l'action ralentissante de la lumière. Dans ce cas, il restait moins de matières pour les besoins de la racine. C'est là, je crois, le secret de l'équivalence observée par M. Famintzin.

En second lieu, j'ai indiqué comme une propriété des tiges étiolées leur *position verticale*. Tandis que les plantes végétant

à l'air libre ont les unes leurs tiges et leurs branches dressées, les autres, au contraire, inclinées, horizontales ou même pendantes, les pousses développées dans l'obscurité s'élèvent presque toutes verticalement, et lorsque, avant d'être mises à l'abri de la lumière, elles avaient crû dans une autre direction, les parties jeunes et encore grandissantes ne tardent pas ensuite à se redrésser suivant la verticale. De nombreuses recherches, dues à différents expérimentateurs, ont mis ce fait hors de doute. Parfois aussi on a l'occasion de très bien voir le phénomène, sans expérience proprement dite. Quand on visite au printemps les orangeries et les serres froides des jardins botaniques, au moment où leur contenu est porté au-dehors, on trouve sans trop de peine, parmi les arbustes qui occupaient le fond, d'excellents exemples de tiges étiolées. C'est ainsi que j'ai été frappé souvent du singulier aspect de grands Fuchsias et d'autres plantes, dont les bourgeons, quelle que fût leur position première, s'étaient tous développés en pousses blanches verticales, de 3 à 4 entre-nœuds, à la suite des conditions défavorables de leur séjour d'hiver.

Pour les plantes qui croissent au grand jour, les causes de la direction qu'elles prennent en s'allongeant ont été cherchées dans la pesanteur et dans la lumière. Déjà au commencement de ce siècle, Knight a tâché de fournir, par ses expériences de rotation, la preuve directe de l'influence de la pesanteur. Plus tard, Hofmeister, Sachs, Wigand et d'autres ont étudié l'influence des agents en question. Tous les deux, la lumière comme la pesanteur, ont le pouvoir de faire changer la direction des parties végétales qui se développent; la première action est appelée héliotropisme, la seconde géotropisme; l'une et l'autre peuvent être aussi bien négatives que positives, et la direction définitive de la tige est déterminée par leur résultante.

La cause prochaine des flexions ou incurvations des tiges, que M. Hofmeister avait cherchée dans un excès d'extensibilité des parois cellulaires de l'épiderme au côté convexe, est, d'aprés les recherches de M. Sachs, un excès d'accroissement à ce côté.

Tandis que la direction des plantes vertes est ainsi déterminée

par le concours de différentes causes (auxquelles vient encore s'ajouter en certains cas la flexion par surcharge), le phénomène est plus simple chez les plantes étiolées, puisque l'un des facteurs, l'action de la lumière, fait défaut. Il ne reste plus que le géotropisme, qui agit positivement dans les racines, négativement dans les tiges. Cet effet se voit déjà chez les plantes qui se développent dans la lumière jaune, par exemple dans celle qui est transmise par une solution de bichromate de potasse, car le pouvoir héliotropique manque à ces rayons. La direction verticale des tiges végétant dans l'obscurité est donc une conséquence immédiate du géotropisme négatif.

Quant à savoir, finalement, à quoi doit être attribué l'allongement des tiges étiolées, voici comment je me représente que les choses se passent.

En l'absence de l'héliotropisme, le géotropisme peut faire sentir librement son action sur le développement de la tige. Celle-ci, comme nous venons de le voir, croîtra donc sans obstacle dans la direction verticale, et les bourgeons qui affectaient primitivement une direction différente seront bientôt, par la même cause, infléchis vers le haut.

L'accroissement, c'est-à-dire la division et l'agrandissement des cellules, n'est pas lié à la présence de la lumière. Il peut avoir lieu tout aussi bien dans l'obscurité, pourvu que les matériaux nécessaires à l'accroissement soient disponibles. C'est ce que nous apprennent une foule de phénomènes de la vie végétale, par exemple, la formation de nouvelles racines et de bourgeons caulinaires sur les rhizomes, la production de stomates et de poils (impliquant aussi de nombreuses divisions de cellules) à l'intérieur de beaucoup d'organes où la lumière n'a pour ainsi dire aucun accès, les partitions cellulaires des Algues, qui se font même de préférence ou exclusivement la nuit, etc. Mais, aucune preuve plus frappante que le développement ci-dessus esquissé (p. 318) du *Fritillaria*, chez qui des tiges, des feuilles et des fleurs se formèrent au sein d'une obscurité totale.

L'accroissement longitudinal de la tige dans l'obscurité, regardé comme résultat aussi bien de la multiplication que de l'agrandissement des cellules, est donc parfaitement conciliable avec nos vues actuelles. Bien plus, cet accroissement de longueur doit, suivant ces vues, être souvent favorisé par l'obscurité.

Car, 1° la lumière exerce, comme l'a montré M. Sachs (*Arbeiten d. bot. Instituts zu Würzburg*, II), une influence retardatrice sur l'accroissement, influence qui devient manifeste en un temps très court. On n'a qu'à mesurer exactement, aux divers instants d'un jour complet, l'intensité de l'accroissement sous les mêmes conditions, notamment à température et humidité égales. On trouve alors, comme suite de l'alternance naturelle du jour et de la nuit, une élévation et une dépression périodiques de la vitesse d'accroissement, avec un maximum à l'approche du lever du soleil et un minimum peu après midi. L'obscurité continue occasionnera donc, toutes choses égales d'ailleurs, un accroissement plus énergique, c'est-à-dire ici un allongement plus considérable de la tige en un même temps.

2°. L'héliotropisme est lui-même, à proprement parler, une action retardatrice de la lumière sur l'accroissement. La flexion de l'organe végétal vers la lumière est due, en effet, à ce que le côté tourné vers la lumière croît moins vite que le côté opposé. L'obscurité totale, ou une lumière dépourvue d'action héliotropique, deux conditions où la flexion ne se produit pas, doivent donc donner lieu à un allongement relativement plus grand de la tige.

La seconde partie de cette assertion est parfaitement démontrée par l'expérience communiquée ci-dessus (p. 312), dans laquelle l'*Impatiens*, placé sous une cloche à bichromate de potasse, qui ne laissait passer que les rayons sans action héliotropique, poussa verticalement et se surallongea, tout en restant vert.

La raison pour laquelle une tige s'allonge beaucoup plus que l'autre dans l'obscurité, me paraît devoir être cherchée surtout dans la grandeur différente de la tension qu'on rencontre chez des plantes différentes, tant par rapport aux parois des cellules mêmes que par rapport aux tissus comparés entre eux. En faveur

de cette opinion plaide d'abord la circonstance, justement signalée par M. Kraus, que l'excès d'allongement à l'état étiolé est nul ou extrêmement petit chez les plantes où l'on ne trouve que peu ou point de tension des membranes. D'un autre côté, je crois pouvoir invoquer les remarquables résultats obtenus par M. Traube sur des cellules inorganiques, dites cellules artificielles (*Archiv für Anat. u. Physiol.*, 1867, p. 87; expériences postérieures dans *Bot. Zeit.*, 1875, n°s 4 et 5). Il est vrai qu'on ne peut en tirer des conséquences qu'avec une extrême circonspection, attendu qu'il y a une différence fondamentale, quant à la formation de la paroi et au mode d'accroissement, entre les cellules inorganiques et les cellules végétales; aussi ne voudrais-je pas souscrire sans réserve à l'application que M. Traube lui-même a faite du résultat de ses expériences, pour expliquer l'accroissement de la fève germée. Mais, entre les deux espèces de cellules, je trouve pourtant, avec M. Reinke (*Bot. Zeit.*, 1875, p. 425), cette analogie-ci: que l'accroissement des unes et des autres exige une forte turgescence, que cette turgescence est due à une énergique absorption d'eau dans les interstices des membranes, et que l'accroissement des parois se fait dans les deux cas par l'interposition de nouvelles particules entre celles qui existent déjà, après que la distance de ces dernières a été agrandie par la pression hydrostatique du fluide cellulaire. A ce point de vue, l'étude des cellules inorganiques est propre peut-être à jeter quelque jour sur ce qui se passe pour l'accroissement de la tige placée dans l'obscurité. Les expériences de M. Sorauer (*Bot. Zeit.*, 1873, p. 145) ont montré combien l'absorption d'eau, en augmentant la turgescence, favorise l'accroissement; et la pesanteur agit, pour l'allongement des cellules de Traube, dans le même sens que le géotropisme chez la tige végétale.

Un surallongement de la tige, dans l'obscurité, est encore rendu possible par la circonstance que l'accroissement en longueur n'est alors entravé, ni par un grand épaississement des parois des éléments du faisceau vasculaire, lesquels arrêteraient dans leur développement les parties à parois minces, ni par une dépense rapide des matériaux nutritifs en couches d'épaississement de

cellules existantes. Ni l'un ni l'autre, en effet, n'a lieu dans l'obscurité.

Quant à la question de savoir pourquoi il naît plus de cellules dans la tige étiolée que dans la tige verte, je ne saurais y répondre, à moins de supposer que la division cellulaire se fait de préférence dans l'obscurité et qu'ainsi l'absence continue de lumière permet à ce phénomène de se répéter plus souvent.

Je ne puis dire non plus, quelle est la vraie raison du développement imparfait du faisceau vasculaire. Nous avons, je pense, affaire ici à un phénomène pathologique, dont la cause déterminante nous échappe, que nous ne pouvons encore déduire des données connues. D'autres facteurs entrent sans doute concurremment en jeu. C'est ainsi que dans la tige étiolée paraissent manquer certaines matières nécessaires à l'accomplissement normal des fonctions vitales, matières qui ne se forment que sous l'influence de la lumière. Plus loin, en parlant des modifications subies par les feuilles, je reviendrai sur cette présomption, qui a déjà été énoncée par M. Prantl.

Changements de forme des feuilles.

Comme on l'a vu ci-dessus, p.302 et suiv., les anomalies que présentent les feuilles des plantes étiolées ne sont pas expliquées de la même manière par M. Kraus et par M. Batalin. L'explication de M. Kraus revient essentiellement à ceci, que la feuille étiolée reste à l'état où elle se trouvait dans le bourgeon, parce qu'elle n'est pas dans l'occasion d'assimiler elle-même; l'explication de M. Batalin consiste à dire que la feuille reste petite, parce que les cellules ne se divisent pas dans l'obscurité. A l'interprétation de M. Kraus, toutefois, des objections fondées ont été faites par M. Batalin, tandis qu'à son tour l'opinion de celui-ci a été réfutée par les mesures directes de M. Prantl. Que faut-il donc penser à ce sujet?

A quelles causes devons-nous attribuer le développement si différent des feuilles étiolées?

D'abord, en ce qui concerne les *feuilles des Graminées* et d'autres Monocotylédones, qui dans l'obscurité deviennent longues et étroites, elles me paraissent éprouver de l'absence de lumière les mêmes effets que les tiges. La direction dans laquelle ces feuilles croissent, direction à peu près verticale, fait à elle seule déjà supposer que le géotropisme négatif joue ici un rôle. Cette influence, de même que chez les tiges, devient prépondérante lorsque, par suite du développement dans l'obscurité, l'héliotropisme ne la contrarie plus. Or, quant à cette dernière action, l'observation de M. Sachs (*Lehrb. d. Bot.*, 4e éd., p. 808) montre que chez les feuilles en question l'héliotropisme positif est très prononcé, puisqu'elles deviennent même asymétriques quand elles ne sont éclairées que d'un seul côté.

Notre présomption trouve aussi un appui dans la structure anatomique de la feuille, qui est la même à la face supérieure et à la face inférieure, et qui, chez la feuille étiolée, n'accuse qu'un faible épaississement des parois dans les éléments des faisceaux vasculaires. Chez ces feuilles étiolées le rapport entre la longueur et la largeur est ordinairement changé, c'est-à-dire que, ou bien (chez les Graminées) elles présentent un excès de longueur avec une largeur à peu près normale, ou bien (comme chez le *Fritillaria*) la largeur a tout au plus la moitié de sa mesure habituelle, la longueur concordant sensiblement avec celle des feuilles vertes. Chez le *Fritillaria*, il résulte de mes mesures que les cellules épidermiques étaient environ moitié aussi larges et un peu plus longues que celles des feuilles normales, tandis que les cellules stomatiques ne différaient ni en grandeur ni en nombre, et, bien que privées de matière verte, étaient abondamment pourvues de fécule. Je crois donc que les modifications des feuilles en question peuvent être rapprochées de celles des tiges. L'opinion de M. Kraus, d'après laquelle une différence de tension dans le sens longitudinal et dans le sens transversal serait ici la cause déterminante, me paraît, de même qu'à M. Batalin, non justifiée.

Ce qui vient d'être dit s'applique aussi, en second lieu, aux *pétioles*, qui chez beaucoup de plantes atteignent dans l'obscurité une longueur inusitée. Un pied feuillé de *Primula chinensis*, par exemple, placé dans l'obscurité, ne montra pendant plusieurs jours aucune modification dans ses feuilles, pas même dans celles qui n'étaient pas encore tout à fait adultes. Celles-ci cessèrent de croître; par contre, les pétioles s'allongèrent considérablement et atteignirent une dimension de 15 à 20 centimètres. Peu à peu les feuilles les plus âgées, et ensuite les plus jeunes, commencèrent à se faner et finirent par tomber. En même temps, il se forma près du sommet de l'axe des feuilles nouvelles étiolées, avec un limbe très petit, de 2 à 3 centimètres de largeur tout au plus, et avec un très long pétiole.

Le *Pelargonium zonale* présente le même phénomène, lorsqu'il végète dans l'obscurité. Les petites feuilles formées dans ces conditions avaient de très longs pétioles, dont le parenchyme était constitué par des cellules plus longues, d'après mes mesures, que les cellules correspondantes du pétiole vert. Les cellules du bois étaient aussi moins épaissies, et les faisceaux vasculaires eux-mêmes étaient isolés et ne formaient pas un anneau ligneux, comme dans les pétioles normaux.

Un troisième exemple m'a été fourni par le *Polygonum bistorta*. Des rhizomes placés dans l'eau développèrent des feuilles, tant à l'air libre que dans un coin obscur d'une chambre exposée au nord. Mais ces feuilles avaient dans les deux cas des dimensions bien différentes, comme le montrent les chiffres suivants:

	f. vertes.	f. étiolées.
longueur de la feuille et du pétiole .	8,0 centim.	18,0 centim.
» du limbe de la feuille . . .	6,0 »	4,5 »
donc longueur du pétiole.	2,0 »	13,5 »
largeur du limbe de la feuille	2,0 »	0,7 »

Enfin, j'ai encore à communiquer un fait intéressant relatif au *Rosa centifolia*.

Deux pieds vigoureux furent placés, au printemps, l'un à la lumière, l'autre dans l'obscurité. Tous les deux émirent une nouvelle pousse, celle du second étant, comme on le sait d'après ce qui a été dit ci-dessus au sujet de la tige (p. 306), blanche et beaucoup plus longue que celle du premier. Les deux pousses portaient des feuilles. Le rameau vert, terminé par un bouton à fleur, avait trois feuilles développées, qui mesuraient en moyenne 10 centim. de la base du pétiole au sommet de la foliole terminale. Celle-ci avait une longueur de 3,8 centim., sur une largeur de 3,0 centim., de sorte que le pétiole était long de 6,2 centim.

Le rameau étiolé, également terminé par un bouton à fleur (qui était très long et mince), avait formé trois petites feuilles rudimentaires, dont la foliole la plus grande ne mesurait que 1,7 centim. en longueur et 1,0 centim. en largeur, mais dont les pétioles, beaucoup plus redressés que chez la plante normale, atteignaient une longueur de 8,5 centim., et même plus.

Dans le pétiole vert se trouvaient, tout près de l'extrémité, trois faisceaux vasculaires, de grandeur à peu près égale sur la coupe transversale; dans le pétiole étiolé il y avait également trois faisceaux vasculaires, mais, indépendamment du caractère ordinaire d'un épaississement moindre des parois, caractère commun aux trois faisceaux, celui du milieu présentait une section plusieurs fois plus grande que celle des deux faisceaux latéraux, de sorte que la coupe du pétiole avait un tout autre aspect. Aux parties plus anciennes du pétiole, je trouvai 5 et quelquefois 6 faisceaux vasculaires dans les deux cas, mais toujours le faisceau central était, chez la pousse étiolée, relativement plus grand que les autres.

Je constate le fait, sans pouvoir en donner d'explication. Serait-ce de nouveau une conséquence de la tendance des organes étiolés à pousser verticalement? Le géotropisme négatif entrerait-il encore ici en jeu, et favoriserait-il l'accroissement des parties centrales aux dépens des parties latérales, de même qu'il paraît déterminer l'allongement des organes axiles, non celui des feuilles? Le phénomène pourrait-il être comparé à la réduction en largeur

des feuilles monocotylées, dont nous avons parlé tout à l'heure? Dans ce cas, les pétioles se rattacheraient donc aussi aux organes caulinaires, tant par l'augmentation d'accroissement en longueur, que par la direction plus verticale, et par le défaut d'épaississement des parois et le développement imparfait des parties latérales.

En troisième lieu, nous avons à considérer les *feuilles des Dicotylédones à nervures anastomosées*, qui dans l'obscurité restent généralement petites et non développées. Ici, il est extrêmement difficile de rendre un compte tant soit peu satisfaisant des phénomènes qui se produisent. Pourrait-on supposer qu'il y a dans ce cas une opposition polaire avec les organes caulinaires et avec les feuilles qui croissent verticalement? que la lumière, qui partout ailleurs retarde l'accroissement, fait ici tout juste le contraire et favorise le développement? Cela est difficile à admettre, et est aussi immédiatement réfuté par l'héliotropisme des feuilles, qui est positif dans la grande majorité des cas. Aussi, ni M. Kraus ni M. Batalin n'ont-ils avancé cette hypothèse; au contraire, M. Batalin (*l. c.*, p. 681) confirme une observation antérieure de M. Sachs, montrant qu'une lumière très forte est nuisible au développement de beaucoup de feuilles, puisque dans ces circonstances elles restent plus petites qu'à une lumière diffuse, moins intense.

L'explication doit donc être cherchée ailleurs. M. Kraus croit la trouver en ce que les feuilles ne croîtraient dans l'obscurité, qu'autant qu'il est nécessaire pour sortir de l'état de bourgeon. Passé ce moment, elles sont destinées à assimiler elles-mêmes et à former de la fécule au moyen de la chlorophylle. Il montre l'absence de la fécule dans les feuilles étiolées, et en conclut que celles-ci restent à l'état gemmaire et, ne pouvant se nourrir elles-mêmes, doivent bientôt cesser de croître et mourir. Le phénomène, toutefois, n'a pas ce degré de simplicité. Personne ne conteste que les feuilles placées dans l'obscurité ne soient privées du pouvoir d'assimilation, et qu'on n'y trouve pas de fécule, sauf dans les cellules stomatiques et dans une rangée de cellules autour des faisceaux vasculaires. Dans mes expériences, ce fait s'est aussi constamment vérifié. Mais tout n'est pas expliqué par là.

D'abord, il n'est pas exact de prétendre que la feuille, après avoir quitté l'état de bourgeon, doit se nourrir entièrement elle-même. Cela est en contradiction avec le fait universellement connu que presque toutes les feuilles, lorsqu'elles sont séparées de la plante qui les a produites, sont incapables de continuer à croître, même lorsqu'elles peuvent recevoir en abondance l'humidité nécessaire et les matériaux nutritifs tant inorganiques qu'organiques. Une expérience spéciale, que j'ai faite il y a quelques années, met cette incapacité en pleine lumière.

Dans l'été de 1867, j'ai pratiqué sur différentes plantes qui croissaient vigoureusement en pleine terre, savoir *Acer Negundo*, *Bignonia Catalpa*, *Robinia Pseudo-Acacia*, *Rhus typhinum*, *Dahlia variabilis*, *Gleditschia triacanthos*, des incisions plus ou moins profondes au pétiole (ordinairement jusqu'au centre de celui-ci), parfois en différents points de la même plante ou du même pétiole général, puis j'ai abandonné à eux-mêmes, sur la plante, les organes ainsi lésés.

Le plus souvent ils continuèrent à croître, mais en subissant des modifications remarquables, comme peuvent encore le montrer les échantillons séchés que j'ai devant moi, qui furent cueillis après leur entier développement. A mesure que l'incision avait été plus profonde et la feuille plus jeune, les modifications étaient naturellement plus prononcées, mais le résultat général (déjà obtenu antérieurement par M. Donders) fut que la feuille ou la foliole, bien qu'entièrement intacte elle-même, était plus ou moins troublée dans son développement aussitôt que l'apport de matériaux nutritifs par le pétiole était plus ou moins entravé. Citons un seul exemple, comme éclaircissement. Une feuille pennée de *Rhus typhinum*, longue de 18 centim., fut incisée, le 21 août, à gauche sous la première foliole, et à gauche et à droite sous la troisième paire de folioles (comptées à partir de la base). Lorsque la feuille, entièrement adulte, fut cueillie, elle avait une longueur totale de 42 centim., et, tandis que les 7 paires supérieures de folioles et la foliole terminale étaient développées normalement, les 4 autres paires de folioles présen-

taient des anomalies. La foliole inférieure de gauche et les deux folioles de la 3e paire, situées toutes les trois directement au-dessus des incisions pratiquées, n'avaient atteint que les ⅔ de la grandeur normale. La 2e foliole de droite et la 4e paire tenaient quant à leurs dimensions le milieu entre la 3e et la 5e paire, cette dernière ayant la grandeur normale et n'accusant donc plus, d'une manière appréciable, l'influence de l'incision. Les deux folioles inférieures de droite avaient au contraire atteint une taille plus grande que d'ordinaire. Elles étaient les plus grandes de toutes les folioles de la feuille pennée. On voit donc combien une feuille, déjà sortie de l'état de bourgeon, a encore besoin de matériaux nutritifs apportés par le pétiole, combien elle dépend, quant à son développement, de la quantité de ces matériaux.

Il est vrai que M. Kraus mentionne une expérience où il a vu une feuille de *Vitis vinifera*, qu'il avait recouverte à moitié d'une feuille d'étain, ne former de fécule et n'augmenter de grandeur que dans les parties exposées à la lumière, de sorte que la feuille était devenue asymétrique. Mais, sans élever le moindre doute sur l'exactitude de cette expérience (qui toutefois ne m'a pas réussi), j'y opposerai ce fait bien connu en horticulture, que sur des fruits en maturation, des pêches par exemple, on peut faire apparaître des figures diverses, des lettres ou des chiffres, en y appliquant une couverture opaque découpée à jour, telle que du gros papier. La soustraction de lumière produit alors une décoloration locale, comme chez la feuille de *Vitis vinifera*, mais sans que l'accroissement s'en ressente, car les fruits soumis à ce traitement ne sont pas irréguliers ou déformés, ainsi qu'il devrait arriver dans le cas d'un arrêt local de l'accroissement.

Pour en revenir à la feuille: du fait que la feuille assimile et produit de la fécule sous l'influence de la lumière, on ne saurait déduire qu'elle puisse préparer elle-même tous ses matériaux et vivre de ses propres ressources. Non-seulement les expériences citées ci-dessus, mais les nombreuses analyses de feuilles de divers âges le démontrent avec toute évidence. Sans remonter aux recherches plus anciennes, on n'a qu'à consulter les résultats des

analyses des feuilles de hêtre aux diverses phases de leur développement, analyses faites par M. Zöller (*Landw. Versuchsstat.*, VI, p. 231) et plus tard confirmées et étendues par M. Rissmüller (*ibid.*, XVII, p. 17), pour acquérir la conviction que pendant toute la durée de son existence la feuille reçoit et élabore des matières et restitue des matières aux organes axiles, de sorte qu'à proprement parler on ne peut même la concevoir accomplissant ses fonctions vitales en dehors de sa liaison avec le reste de la plante.

En second lieu, on peut objecter à l'explication de M. Kraus que la feuille étiolée est tout autre chose qu'une petite feuille à l'état gemmaire. La feuille née dans l'obscurité est en général petite, tout en présentant des différences assez notables de dimensions chez des plantes différentes; mais toujours elle surpasse plusieurs fois en grandeur la petite feuille de la même espèce, qui vient de sortir du bourgeon. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à comparer l'une et l'autre chez le *Fuchsia*, le *Pelargonium*, le *Phaseolus*. etc. Chez le *Begonia glabra* la feuille étiolée atteignit même une surface de 6 à 10 centim. carrés.

Le plissement ou l'enroulement, que les feuilles présentent dans le bourgeon, ne se retrouve pas non plus chez la feuille étiolée, bien que parfois les bords de la feuille rappellent un peu cet état.

Mais la preuve la plus concluante de la différence en question est donnée par la structure anatomique de la feuille étiolée. Les divers tissus y sont bien différenciés, beaucoup plus distinctement que chez la feuille renfermée dans le bourgeon. Il y a aussi un plus grand nombre de cellules dans la feuille étiolée, ainsi que M. Prantl (*Arbeiten d. bot. Instit. zu Würzburg*, III, p. 384) l'a établi par des mesures spéciales chez le *Phaseolus vulgaris*. Par là se trouve directement réfutée l'explication de M. Batalin, suivant laquelle le défaut d'accroissement de la feuille étiolée serait dû à ce qu'il ne peut s'y opérer de divisions cellulaires, — explication qui était déjà rendue très improbable par les nombreux exemples de cellules se divisant dans l'obscurité que nous fournit le règne végétal (voir ci-dessus, p. 329). Comparée à la

structure de la feuille verte, celle de la feuille étiolée offre toutefois quelques différences importantes. Outre les faisceaux vasculaires, relativement peu développés, c'est surtout le parenchyme spongieux qui se trouve modifié. Tandis que l'épiderme est bien développé dans les deux cas (encore qu'il puisse y avoir quelque différence quant à la grandeur absolue des cellules épidermiques), et que le parenchyme en palissade, quoique privé de chlorophylle, ne montre aucun retard d'accroissement, on voit dans la moitié inférieure de la feuille, au lieu du parenchyme spongieux bien connu, un tissu de cellules serrées, qui souvent se distingue à peine du parenchyme en palissade. Ces cellules ne se sont pas allongées, et les parois contiguës ne se sont pas disjointes, de sorte que les cavités et canaux aériens font défaut. M. Kraus, qui en avait aussi déjà fait la remarque (*l. c.*, p. 231), attribue avec raison à ce développement imparfait du parenchyme spongieux le phénomène que les bords des feuilles étiolées se roulent ordinairement en arrière. Selon lui, dans l'état normal, le parenchyme spongieux se développe beaucoup plus tôt que le parenchyme en palissade, parce que les petites feuilles, en sortant du bourgeon, ont d'abord une position verticale, et qu'alors leur face inférieure, tournée en dehors et recevant l'influence de la lumière, est la première à former de la chlorophylle et ensuite de la fécule. Si les choses se passent ainsi, et je n'ai aucune raison d'en douter, il résulterait de là un nouvel argument contre la thèse de M. Kraus, qui regarde la feuille étiolée comme restée dans la période de l'état de bourgeon ; car, d'accord en cela avec M. Kraus, j'ai toujours trouvé chez la feuille étiolée le parenchyme en palissade bien développé, mais non le parenchyme spongieux.

En général, les feuilles qui restent petites dans l'obscurité paraissent être surtout celles où se voit un contraste manifeste (par la présence du parenchyme en palissade et du parenchyme spongieux) entre la moitié supérieure et la moitié inférieure. Tel est le cas des feuilles de la plupart des Dicotylédones. Chez les Monocotylédones, où il existe peu ou point de différence entre

les deux moitiés supérieure et inférieure, les feuilles atteignent généralement des dimensions relativement plus grandes. Il en est de même chez certaines Dicotylédones, telles que le *Begonia glabra*, dont les feuilles ont à peu près la même structure en-dessus et en-dessous. Peut-être ne se risque-t-on pas trop en songeant, chez cette dernière plante, à une influence prépondérante de l'épiderme. M. Famintzin, en effet, a montré dernièrement (*Beitrag zur Keimblattlehre im Pflanzenreich*, dans *Mém. de l'Acad. imp d. sc. de St. Pétersburg*. VIIe Sér.. XIII, p. 26) que les grandes cellules limpides et sans chlorophylle, dont se compose la masse principale de la feuille, sont nées par division tangentielle des cellules épidermiques, et non, comme le croyait M. Pfitzer, de la couche cellulaire sous-jacente de l'épiderme. S'il est vrai que la 1ère et la 6e des *couches initiales* de Famintzin forment les cellules en question, l'épiderme (qui dans les organes étiolés est ordinairement bien développé, pourvu de stomates et même de fécule) est peut-être, chez la feuille de Bégonia, la cause prochaine de l'accroissement relativement grand qu'elle prend dans l'obscurité.

Si l'on demande qu'elle est la vraie cause du faible développement des feuilles, je dois m'abstenir de répondre; une explication exacte et complète du phénomène ne m'est pas connue, et je ne crois pas non plus qu'elle puisse être donnée en ce moment, attendu qu'elle exigerait, ainsi que je l'ai montré plus haut (p. 305), la connaissance préalable de divers points non étudiés jusqu'ici. Mais si l'on se borne à demander dans quelle direction il faut chercher de préférence pour se rapprocher du but désiré, je pense qu'il y a déjà quelques indications à donner. La feuille étiolée est, à mon avis, un phénomène pathologique, provenant en partie, ainsi que l'a déjà remarqué M. Sachs, du défaut de l'assimilation, laquelle appartient aux fonctions normales de la plante, et en partie aussi d'autres causes, qui ont de l'influence sur l'accroissement. Les phénomènes chimiques jouent probablement dans la question un rôle au moins aussi important que les phénomènes physiques.

Il convient de rappeler ici l'expérience de M. Batalin (voir ci-dessus, p. 303), qui, ayant mis de jeunes plantes pendant 1½ à 3 heures chaque jour à une lumière très faible, vit les petites feuilles grandir sous cette influence. Cette lumière était insuffisante à former la matière colorante chlorophyllienne, car les cotylédons et les tigelles ne montraient pas trace de verdissement, ils étaient aussi pâles que ceux qui étaient restés dans l'obscurité. Il ne pouvait donc pas non plus y avoir eu d'assimilation dans ces circonstances. Et, malgré cela, les feuilles de ces plantes exposées pendant peu de temps à un minimum de lumière se développèrent beaucoup plus vite et plus longtemps que les autres et atteignirent par suite des dimensions bien plus considérables. Apparemment il y a eu ici formation de matières chimiques nécessaires au développement des feuilles, et dont la production exigeait l'action de la lumière, mais d'une lumière si faible qu'elle n'était pas capable de donner naissance à la chlorophylle et encore moins, par conséquent, de déterminer l'assimilation.

C'est là aussi, je présume, la raison pour laquelle les plantes qu'on fait germer dans l'obscurité meurent si souvent, bien que les cotylédons ou l'albumen soient encore remplis de matériaux nutritifs. M. Kraus pense que dans ces cas la plante est privée du pouvoir de transformer sa fécule en cellulose dans l'obscurité. Je préférerais dire, d'une manière plus générale, qu'un état pathologique est survenu, parce que certaines actions chimiques nécessaires au développement normal et qui, tout en pouvant s'accomplir à une lumière faible, ont pourtant besoin à un certain degré de l'intervention de cet agent, ou bien ne se sont pas produites, ou bien ont été modifiées.

Ces modifications chimiques, dues à l'absence de la lumière, ne nous sont encore que très imparfaitement connues. On sait que la matière colorante verte pâlit et disparaît, que la fécule existante diminue et qu'il ne s'en forme pas de nouvelle, en un mot, que l'assimilation n'a pas lieu; mais il y a encore bien d'autres actions qui ont ici de l'influence. Nous aurons donc à rechercher en premier lieu quelles sont, des matières chimiques contenues dans les plantes normales, celles qui manquent ou sont

modifiées dans la plante étiolée du même âge. Peut-être trouve-t-on aussi dans cette dernière des combinaisons qui n'existent pas dans la plante verte. Tout le monde sait que les parties végétales étiolées, dont on fait usage pour l'alimentation, l'endive, la laitue, l'asperge, diffèrent considérablement des parties analogues vertes, non-seulement par une consistance plus tendre, mais aussi par un goût mois amer ou moins âcre. Entre les unes et les autres il y a donc évidemment une différence chimique. Mais je ne sache pas que des études comparatives aient été faites concernant la nature de cette différence ou la quantité et l'espèce des matières dans les deux cas.

En revanche, nous possédons quelques données importantes pour la comparaison des changements chimiques qui se produisent lors de la germination des graines dans l'obscurité et à la lumière. En premier lieu, nous avons les belles recherches de M. Pfeffer sur l'asparagine (Pringsheim, *Jahrb. f. wiss. Bot.*, VIII, p. 557). Cette matière azotée, découverte dès 1805 par Vauquelin et Robiquet dans l'asperge ordinaire, se forme, d'après le témoignage concordant de différents expérimentaleurs, lors de la germination de diverses graines, et très distinctement surtout chez le *Lupinus luteus*, aux dépens des matières albuminoïdes que ces graines renferment. Dans cette transformation, qui peut s'effectuer aussi bien sous l'influence qu'à l'abri de la lumière, de l'oxygène est fixé et du carbone et de l'hydrogène sont mis en liberté (*l. c.*, p. 555). Lorsque les plantes germantes restent dans l'obscurité, l'asparagine s'accumule, juqu'à constituer $\frac{1}{5}$ de la matière sèche, selon MM. Schulze et Umlauft (*Landsw. Versuchsstat.*, XVIII, 1). Les plantes sont-elles au contraire exposées à la lumiére et commencent-elles à assimiler, on voit l'asparagine disparaître peu à peu. Cette influence de la lumière, mise en question par quelques-uns, mais déjà signalée par M. Boussingault et confirmée par M. Pfeffer [1]), paraît consister en ce que, au

[1]) Voir à ce sujet, outre le travail ci-dessus cité de M. Pfeffer (p. 557 et suiv.), l'ouvrage que vient de publier M. Robert Sachsse: *Die Chemie und Physiologie der Farbstoffe, Kohlenhydrate und Proteïnsubstanzen*, p. 246—256.

moyen des hydrocarbures formés par assimilation, l'asparagine régénère les matières albuminoïdes, qui feront la base du protoplasme. Chez le *Lupinus* et autres plantes, toutefois, dont les graines renferment relativement peu d'hydrocarbures, il n'en existe pas une quantité suffisante pour fournir, indépendamment de la perte due à la respiration dans l'obscurité, le sucre nécessaire à cette régénération. C'est pourquoi l'asparagine ne disparaît pas.

Ainsi donc, l'absence de lumière a pour résultat que l'asparagine, qui est probablement l'intermédiaire par lequel les parties nouvelles de la plante normale reçoivent leurs matières albumineuses, ne peut remplir ce rôle, de sorte que la formation du protoplasme est aussi entravée.

Une autre contribution importante, que je me bornerai à citer (le défaut d'espace ne me permettant pas de faire davantage), est le travail de M. Rudolf Weber sur la fixation de principes inorganiques par des pois germant sous une lumière diversement colorée et dans l'obscurité (*Landw. Versuchsst.*, XVIII, p. 18). Cette fixation s'est montrée tout aussi dépendante de la lumière que la décomposition de l'acide carbonique par les plantes vertes, et la différence se manifestait non-seulement dans la quantité totale des matières incombustibles, mais aussi et surtout dans leur nature. C'est ainsi que sous l'influence des rayons les moins réfrangibles il se fixa beaucoup plus d'acide phosphorique, fait entièrement en harmonie avec l'abondance des matières protéiques formées dans ces conditions, tandis que sous l'influence des rayons bleu-foncé, plus réfrangibles, et plus encore dans l'obscurité, l'absorption de la potasse et de la chaux devint relativement prépondérante. Or, comme nous l'ont appris les recherches de M. Zöller (*Regensburger Flora*, 1867, p. 509), la potasse et surtout la chaux sont les matières inorganiques qui ont les rapports les plus intimes avec la formation de la cellulose. Les cendres de toute paroi cellulaire en renferment une certaine quantité, et un apport copieux de ces substances favorise le développement des cellules, ainsi qu'il résulte d'expériences directes faites sur le Maïs.

Les modifications considérables que présente le processus chimique dans les plantes étiolées ont aussi été récemment mises en lumière, en ce qui concerne le soufre, par M. E. Schulze, de Zurich (*Landw. Versuchsst.*, XIX, p. 172). Tandis que les plantes vertes possèdent, comme on sait, le pouvoir de décomposer les sulfates au profit des matières albuminoïdes sulfurées, M. Schulze a trouvé que, chez le *Lupinus luteus* développé dans l'obscurité, la proportion d'acide sulfurique augmente en même temps que la décomposition des matières protéiques. L'analyse lui donna, en 100 parties de matière sèche:

dans la graine non germée. . .	0,385	acide sulfurique
dans les plantes âgées de 12 jours.	1,510	» »
» » » » » 15 »	1,703	« »

Ainsi, pendant que les matières albuminoïdes se transforment en asparagine, avec élimination de carbone et d'hydrogène, leur soufre est oxydé et changé en acide sulfurique.

Un autre fait, que j'ai observé et dont on pourra peut-être tirer quelque parti, est l'absence complète de noyaux cristallins dans les cellules des pieds étiolés du *Polygonum cuspidatum* (voir ci-dessus p. 316), noyaux qui sont au contraire si abondants dans la plante verte. L'oxalate de chaux, dont ces cristaux se composent, doit en effet être considéré, d'après les recherches de M. Holzner (*Flora*, 1867, p. 497 et 513), de M. Hilgers (Pringsheim, *Jahrb. f. wiss. Bot.*, VI, p. 285) et d'autres, comme un produit d'élimination, par le moyen duquel la chaux superflue et inutile à la vie de la plante est déposée sous forme solide. Cette chaux est mise en liberté par le phosphate de chaux absorbé, lorsque celui-ci se décompose pour fournir l'acide phosphorique nécessaire aux nouvelles matières albuminoïdes qui se forment. L'acide oxalique, substance généralement répandue dans les plantes vertes, provient probablement, soit de la réduction de l'acide carbonique absorbé, soit, d'après quelques-uns, du dédoublement de la sève assimilée, lors de la formation du protoplasme. En tous cas, cet acide apparaît d'une manière assez constante au voisinage immédiat des organes qui se développent,

et par suite les cristaux d'oxalate de chaux se rencontrent, d'abord petits et ensuite plus grands, dans les parties relativement jeunes des plantes.

Leur absence totale dans la plante étiolée témoigne donc 1° d'un trouble dans l'absorption ou la réduction du phosphate de chaux, ce qui est tout à fait en harmonie avec les expériences ci-dessus citées de M. Weber et avec le résultat obtenu par M. Pfeffer, à savoir que, dans l'obscurité, l'asparagine ne régénère pas la matière albumineuse; elle témoigne 2°, suivant qu'on adopte l'une ou l'autre des deux hypothèses concernant l'origine de l'acide oxalique, soit du défaut de réduction de l'acide carbonique, déjà connu d'ailleurs, soit d'un changement dans la composition de la sève assimilée, par suite d'une modification des processus chimiques.

Enfin, relativement à l'acide tannique, j'ai, dans le cours d'autres recherches, étudié avec beaucoup de soin les points d'analogie et de différence entre des plantes vertes de la même espèce. L'acide tannique, qui prend naissance lors de la germination (il manque dans la graine non germée) se trouve ordinairement aussi bien dans les plantes étiolées que dans les plantes normales. La lumière ne paraît donc pas être nécessaire à sa formation; néanmoins, sous ce rapport aussi, on constate encore quelque différence suivant que la plante a été soumise ou non à l'action de ce stimulant. En général, la quantité de l'acide tannique est plus faible dans les organes étiolés, la distribution est moins régulière et la réaction, surtout avec le bichromate de potasse, un peu autre. C'est ainsi que la feuille verte du *Polygonum bistorta* contient de l'acide tannique dans la plupart des cellules du parenchyme et dans les éléments du faisceau vasculaire, tandis que la feuille étiolée n'en renferme que dans ce dernier. Ainsi encore, j'ai trouvé dans le rameau étiolé du *Rosa centifolia* le nombre des cellules tannifères de l'écorce beaucoup plus petit que dans le rameau vert, et en outre le tannin s'y trouvait en partie sous une autre forme. Il en était de même chez le *Vicia Faba*.

Comme notre ignorance est encore presque complète au sujet de l'origine et de la fonction de l'acide tannique dans la plante, les différences qui viennent d'être signalées ne permettent, pour le moment, aucune conclusion relativement à la question qui nous occupe; mais la circonstance que l'acide tannique, dont la présence est si générale au voisinage immédiat des organes qui se développent ou qui jouissent d'une vitalité énergique, paraît être quant à sa formation indépendant de la lumière, ou du moins n'en être modifié que dans une faible mesure (peut-être secondairement), cette circonstance, dis-je, mérite bien d'être notée.

Les faits qui précèdent, tout en montrant çà et là quelques rapports, ne sont pas à beaucoup près suffisants pour donner une explication des phénomènes de l'étiolement. Ce ne sont encore que des pierres d'attente isolées et éparses, mais qui plus tard trouveront leur place et leur emploi, lorsque les matériaux seront complets et que l'architecte sera venu pour élever le monument.

Aussi ne me suis-je pas proposé, je le répète, de trouver la solution du problème; mon seul but a été de faire le triage des idées émises concernant les causes des modifications que la soustraction de lumière occasionne dans les plantes, de signaler les lacunes de nos connaissances et d'indiquer la direction dans laquelle, à mon avis, les recherches doivent être conduites pour éclairer la question.

Les résultats auxquels nous sommes parvenus peuvent être résumés de la manière suivante:

1°. L'opinion de M. Kraus, suivant laquelle l'allongement anormal des tiges dans l'obscurité est la conséquence d'un excès de croissance de la moelle, combinée avec un développement imparfait et un faible épaississement des éléments du faisceau vas-

culaire, est fondée en ce qui concerne le second point. J'en ai donné la preuve, pour des plantes appartenant aux genres *Rosa*, *Phaseolus*, *Fuchsia*, *Impatiens*, *Vicia*, *Polygonum*, *Tradescantia*, *Fritillaria*, par une culture intentionelle et par de nombreuses mesures comparatives.

La différence anatomique entre les tiges vertes et étiolées s'accuse surtout dans le faible épaississement, chez ces dernières, des parois des cellules épidermiques, ligneuses et libériennes, dans le nombre et la dimension radiale des faisceaux vasculaires et de leur éléments, dans l'absence de la gaîne du faisceau vasculaire chez les Monocotylédones, et par contre dans le développement considérable de la moelle.

2°. C'est à tort que M. Kraus attribue le défaut d'épaississement des parois de l'épiderme et du collenchyme à l'absence de la matière colorante chlorophyllienne, car les cellules de la moelle ont souvent aussi des parois minces, bien qu'elles ne possèdent pas de matière colorante verte; l'hypothèse en question ne se concilie pas non plus avec le fait que les cellules parenchymateuses de l'écorce et l'épiderme atteignent parfois une grandeur extraordinaire.

3°. L'allongement exagéré de la tige dans l'obscurité n'est pas imputable, comme le veut M. Kraus, à l'influence prépondérante de la moelle seule; le rôle actif en ce phénomène doit être attribué au tissu fondamental tout entier (à l'écorce aussi bien qu'à la moelle), car

a. des tiges creuses montrent aussi cet allongement extraordinaire (*Polygonum*, *Phaseolus*, *Impatiens*);

b. souvent l'écorce est allongée anormalement, même là où la moelle existe (*Fuchsia*).

4°. Le développement plus énergique du tissu fondamental, surtout de la moelle, peut donner lieu à un sur-accroissement dans une direction perpendiculaire à l'axe de la plante (c'est-à-dire, à une augmentation d'épaisseur de la tige), là où l'accroissement longitudinal paraît être moins actif (*Fuchsia*, *Tradescantia*).

5°. La dépendance admise par M. Famintzin entre la longueur de la tige et celle de la racine n'est pas justifiée. Elle n'a été

observée que pour l'axe hypocotyle et la racine primaire durant les premiers jours de la germination, alors que tous les deux doivent puiser au même réservoir limité et ont par conséquent à partager ensemble. Dès que l'assimilation commence, cette relation cesse.

6°. La position verticale des tiges étiolées est le résultat de l'absence d'un des facteurs qui déterminent la direction dans laquelle croissent les parties des plantes, à savoir, de l'héliotropisme. Les plantes qui se développent sous l'influence de rayons de faible réfrangibilité, lesquels ne possèdent pas la force d'inflexion, prennent la même direction verticale, même quand elles restent vertes (*Impatiens*).

6°. Les anomalies que la tige présente dans l'obscurité doivent donc être regardées comme l'effet du géotropisme négatif, non gêné ni modifié par l'héliotropisme et favorisé par le faible épaississement des parois cellulaires.

Car :

a. l'accroissement, c'est-à-dire, la division et l'agrandissement des cellules, n'est pas lié à la présence de la lumière, mais s'opère même souvent de préférence dans l'obscurité ;

b. le géotropisme négatif, agissant sur la tige en voie d'accroissement, la fait s'allonger verticalement ;

c. l'héliotropisme ralentit l'accroissement, puisque l'inflexion est une conséquence de l'accroissement longitudinal plus faible au côté tourné vers la lumière ;

d. le faible épaississement des parois des éléments du faisceau vasculaire ne met pas obstacle à l'allongement, par géotropisme négatif, des cellules parenchymateuses qui se développent.

8°. La cause de l'inégalité, que des plantes différentes présentent sous le rapport du sur-allongement dans l'obscurité, réside probablement dans le degré différent de la turgescence des cellules et de la tension relative des tissus.

9°. La vraie cause du développement imparfait et du faible

épaississement pariétal des éléments du faisceau vasculaire chez les tiges étiolées reste encore inconnue.

10°. Les modifications des feuilles des Graminées et autres plantes, chez qui ces organes deviennent plus longs et plus étroits dans l'obscurité, doivent être comparées à celles des tiges, tant à raison du développement imparfait des faisceaux vasculaires, qu'à raison de la direction verticale.

11°. Il en est de même, probablement par des raisons semblables, des pétioles de beaucoup de plantes, ainsi que me l'ont montré *Primula*, *Pelargonium*, *Polygonum* et *Rosa*.

12°. Les explications que M. Kraus et M. Batalin ont données de l'état rudimentaire où restent dans l'obscurité les feuilles de la plupart des Dicotylédones sont l'une et l'autre insuffisantes. Celle de M. Batalin est réfutée par les résultats des mesures directes dues à M. Prantl. L'inadmissibilité de l'explication de M. Kraus ressort des trois propositions suivantes.

13°. Les feuilles, sorties du bourgeon, sont incapables de continuer à se nourrir entièrement par assimilation propre. C'est ce que prouvent:

a. les résultats que j'ai obtenus des incisions faites au pétiole de feuilles pennées.

b. ceux des nombreuses analyses de feuilles de la même plante à des âges différents.

14°. Les feuilles étiolées ne peuvent être assimilées, comme le veut M. Kraus, à de petites feuilles sortant du bourgeon. Elles sont plus grandes et leurs tissus sont plus différenciés.

15°. Sous le rapport anatomique, les feuilles étiolées, outre qu'elles ne contiennent ni matière colorante verte ni fécule (sauf dans les cellules stomatiques, qui renferment toujours de la fécule en abondance), diffèrent encore des feuilles vertes de la même dimension par le faible épaississement des éléments du faisceau vasculaire et surtout par le non-développement du parenchyme spongieux.

16. Les feuilles, qui paraissent surtout rester petites, sont celles qui montrent un contraste évident entre la face supérieure et la face infé-

rieure, entre le parenchyme en palissade et le parenchyme spongieux.

17°. L'explication complète de cet arrêt d'accroissement ne peut encore être donnée. La feuille étiolée est un produit pathologique, dû en partie au défaut d'assimilation, en partie à d'autres actions, tant chimiques que physiques, qui ont de l'influence sur l'accroissement.

18°. La raison pour laquelle, chez beaucoup de plantes germées, les cotylédons encore remplis de matériaux nutritifs meurent dans l'obscurité, paraît devoir être cherchée dans l'absence de certaines actions chimiques nécessaires à l'accroissement, actions qui ont encore lieu, comme nous l'apprend l'expérience de M. Batalin, à une lumière très faible, insuffisante pour permettre l'assimilation.

19°. Une étude comparative, à la fois chimique et physiologique, de plantes étiolées et de plantes vertes est avant tout requise pour élucider les phénomènes de l'étiolement.

20°. Comme matériaux de ce travail pourront déjà servir: les résultats obtenus par M. Pfeffer sur la formation de l'asparagine et la régénération des matières albumineuses, ceux de M. R. Weber sur l'absorption de l'acide phosphorique et de la chaux, ceux de M. Schulze sur la formation de l'acide sulfurique, enfin les miens sur la présence du tannin et des cristaux d'oxalate de chaux dans les plantes étiolées et dans les plantes vertes.

Utrecht, novembre 1876.

EXPLICATION DES FIGURES. (Planches VI et VII.)

Fig. 1. Coupe transversale d'un rameau vert, normal, de *Rosa centifolia*. *v*. l'anneau des faisceaux vasculaires.

" 2. Coupe transversale d'un rameau étiolé de *Rosa centifolia*, du même âge que le précédent. *v*. l'anneau des faisceaux vasculaires.

" 3 Coupe transversale d'un rameau vert, normal, de *Fuchsia globosa*.

" 4. Coupe transversale d'un rameau étiolé, du même âge, de *Fuchsia globosa*.

Fig. 5. Une petite partie de la fig. 3, de la circonférence à la moelle, plus fortement grossie: *a.* épiderme et cellules corticales externes subérifiés, *b.* couche subéreuse, *c.* phloème ou couche corticale secondaire, *d.* cambium, *e.* xylème ou corps ligneux du faisceau vasculaire, *f.* étui médullaire, *g.* moelle.

〃 6. Une petite partie de la fig. 4, vue au même grossissement que la fig. 5; les lettres ont la même signification que dans la fig. 5.

〃 7. Coupe transversale de la base de la tige germée du *Vicia Faba* L., avec indication des faisceaux vasculaires. Le cercle intérieur marque la partie creuse de la tige.

〃 8. Coupe transversale de la base d'une tige germée étiolée du *Vicia Faba*, qui a la même grosseur que la précédente, mais qui n'est pas encore creuse.

〃 9. Coupe transversale d'un faisceau vasculaire de la tige verte adulte du *Polygonum cuspidatum*: *a.* épiderme, *b.* collenchyme, *c.* parenchyme cortical avec noyaux cristallins. *d.* fibres libériennes épaissies et quelques cellules du sclérenchyme, unies en une masse solide et cohérente, *e.* vaisseaux cribreux et cellules parenchymateuses du phloème. *f.* cambium, *g.* cellules ligneuses, *h.* vaisseaux, *i.* cellules médullaires.

〃 10. Coupe transversale d'un faisceau vasculaire d'une tige étiolée adulte du *Polygonum cuspidatum*; signification des lettres comme dans la figure précédente.

SUR LES ÉCARTS

DE LA

LIGNE GÉODÉSIQUE ET DES SECTIONS PLANES NORMALES

ENTRE

DEUX POINTS RAPPROCHÉS D'UNE SURFACE COURBE,

PAR

F. J. VAN DEN BERG.

Dans le calcul des triangles établis sur la surface sphéroïdale de la Terre, on prend souvent pour côtés, au lieu des lignes les plus courtes, dites lignes géodésiques, entre les sommets du triangle, les sections de la surface terrestre par des plans passant par la normale d'un des sommets et par un autre sommet. Tant sous le rapport de la longueur des côtés que sous celui de la grandeur des angles, il résulte de cette substitution certaines différences, qui sont ordinairement petites, il est vrai, mais de la valeur desquelles il peut néanmoins être utile, en géodésie, de se rendre un compte exact. C'est à quoi servent, dans la supposition que la Terre soit considérée comme un ellipsoïde de révolution faiblement aplati, les formules données par Bessel dans les *Astronomische Nachrichten*: pour la différence d'azimut, celle qu'il a énoncée dans le tome I, 1823, pag. 36, puis démontrée dans le tome XIV, 1837, pag. 289, (form. 19), et pour la différence de longueur celle qu'il a communiquée dans le tome XIV, 1837, p. 285. La première de ces formules a été retrouvée plus tard d'une autre manière par M. J. J. Baeyer, dans son ouvrage *Das Messen*

auf der sphäroïdischen Erdoberfläche, 1862, pag. 66, où l'équation (81) la reproduit sous une forme un peu différente. Elle figure aussi, comme la première des formules (52) et (53), à la page 60 des *Geodätische Untersuchungen* de P. A. Hansen, 1865, publiées au tome VIII des *Mathem. Phys. Abhandlungen der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* (voir aussi p. 105 et 208 du même tome). En outre, dans l'ouvrage de M. Baeyer, § 24, p. 87—93, se trouve insérée une étude de M. Weingarten sur le même sujet, mais pour une surface quelconque, étude à laquelle l'auteur a encore ajouté, dans les *Astron. Nachr.*, tome LX, 1863, pag. 134—136, le résultat d'un calcul ultérieur exécuté par lui. En se fondant sur les formules établies dans ce travail, d'abord pour le cas général puis en particulier pour l'ellipsoïde de révolution, — formules dont les dernières sont reproduites par M. W. Jordan, *Taschenbuch der praktischen Geometrie*, 1873, pag. 338, — M. Weingarten énonce cette propriété: que la ligne géodésique, qui joint deux points rapprochés d'une surface quelconque, est située entre les sections de la surface par les deux plans déterminés par la normale en un des points et par l'autre point, et cela de telle sorte qu'en chacun de ces points l'angle compris entre la ligne géodésique et la section normale en ce point est le tiers de l'angle que ces sections forment entre elles. Une démonstration géométrique de cette propriété a aussi été donnée par M. A. Sonderhof, dans l'*Archiv der Mathematik und Physik* de Grunert, t. LI, 1870, p. 29—33 et 42—45. Pour le sphéroïde terrestre, elle est en outre impliquée, en faisant σ égal à zéro ou égal à σ', dans la formule $\frac{QP}{QQ'} = \frac{\sigma' + \sigma}{3\sigma'}$, qu'on trouve dans un Mémoire de M. A. R. Clarke, *Philosophical Magazine*, t. XXXIX, 1870, p. 361.

La validité générale de cette propriété, au sujet de laquelle M. Weingarten n'avait pas examiné la possibilité de l'existence de cas exceptionnels, a été contestée par M. C. Bremiker, dans ses *Studien über höhere Geodäsie*, 1869, p. 3; il lui oppose la remarque, que si, par exemple, les deux points de la surface

terrestre ont même latitude, les deux intersections normales se confondent en un même arc elliptique, et que néanmoins la ligne géodésique suit un cours différent. Le passage ci-dessus cité du *Taschenbuch* de Jordan est aussi condamné, avec appel à M. Bremiker, par M. F. R. Helmert, dans un article critique de la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* de Schlömilch, 18e année, 1873, rubrique *Literaturzeitung*, p. 39, où est donnée en outre une formule (inexacte, à ce qu'il me semble) pour l'écart qui existe, dans le cas particulier dont il vient d'être question, entre la section normale commune et la ligne géodésique, prises en leur milieu.

Il y a donc là une apparente contradiction, dont personne, à ma connaissance, n'a donné d'explication spéciale, bien que les formules (9) et (15) de M. Clarke, établies pour la Terre, eussent pu fournir quelques indications à cet égard. Dans les développements qui suivent, j'essaierai de résoudre la difficulté signalée, et en même temps de mieux déterminer, pour différents cas, les rapports qui lient entre elles la ligne géodésique et les sections normales sur une surface donnée.

Tant qu'on se borne à considérer, non la valeur propre des angles que la ligne géodésique fait avec les sections normales, mais seulement leur rapport, on peut se convaincre aisément et presque sans aucun calcul (par une méthode qui pourrait aussi servir dans d'autres cas analogues) que, en général, la propriété trouvée par M. Weingarten est réelle.

1°. Supposons, en effet, que sur une surface quelconque on ait tracé entre deux points rapprochés P et P_1 la ligne géodésique et les deux sections planes normales en P et P_1, et que par les points de la ligne géodésique on mène les plans tangents à la surface, ceux-ci donneront par leurs intersections deux à deux les génératrices d'une surface développable, qui enveloppera la surface donnée suivant la ligne géodésique elle-même. Si l'on s'éloigne un peu à droite ou à gauche de cette ligne, il suit du contact des deux surfaces que leur distance mutuelle en cet endroit

est une petite grandeur d'un ordre double de celui de l'éloignement de la ligne géodésique, et par conséquent négligeable par rapport à cet éloignement. Comme en outre les deux surfaces ont leurs normales communes dans tous les points de la ligne géodésique $P P_1$, il est évident qu'elles fournissent non-seulement une ligne géodésique absolument commune entre P et P_1, mais aussi, abstraction faite de petites grandeurs d'ordre supérieur, des intersections communes avec les deux plans normaux en ces points. De cette manière, la démonstration pour une surface quelconque se trouve ramenée à celle pour une surface développable déterminée par la première. Or si l'on étend la surface développable sur un plan, les angles finis ne changeront pas de grandeur, tandis que la ligne géodésique $P P_1$ deviendra une ligne droite (fig. 1, Pl. VIII) et que les sections normales en P et P_1 se transformeront en lignes courbes $P p P_1$ et $P_1 p_1 P$, qui auront respectivement en P et P_1 des points d'inflexion. [1]) En outre, ces courbes seront situées de part et d'autre de leur corde com-

---

1) Si l'on se représente en général, pour un point P d'une courbe quelconque $M P Q$ tracée sur une surface développable, la génératrice $P S$, les éléments adjacents égaux $M P$ et $P Q$ et le prolongement $P M'$ du premier de ces éléments, qu'on fasse dans le plan $S P M'$ l'angle $S P q$ égal à $S P Q$, et qu'on prenne $P q = P M' = P Q$, il résulte du triangle rectangle infiniment petit $M' Q q$ que la courbure de la courbe développée $M P q$, mesurée par l'angle de contingence $M' P q$ ou par le côté $M' q$ de l'angle droit, est égale au produit de la courbure de la courbe originelle $M P Q$, mesurée par l'angle de contingence $M' P Q$ ou par l'hypothénuse $M' Q$, et du cosinus de l'angle $Q M' q$ formé par le plan osculateur $M' P Q$ de cette courbe et le plan tangent $M' P S$ à la surface. (Voir aussi, pour la démonstration de cette propriété: F. Minding, dans Crelle *Journal für Mathematik*, t. XVI, 1837, p. 351; E. Catalan, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XVII, 1843, p. 738—739; J. de la Gournerie, *Géométrie descriptive*, 1860—64, art. 474 et 819; et P. Serret, *Théorie nouvelle des lignes à double courbure*, 1860, p. 8—10 et 129—130). Si donc le plan osculateur est en un point P normal à la surface développable, la courbure de la courbe développée devient nulle dans le point correspondant, c'est-à-dire que cette courbe y présente un point d'inflexion, ce qui résulte aussi directement de ce que, pour chaque point P de ce genre, les éléments adjacents $M P$ et $P Q$ sur la surface doivent former des angles égaux avec la génératrice $P S$.

mune $P P_1$: en effet, l'existence du point d'inflexion en P montre que la courbe $P p P_1$, prolongée en arrière, fournirait encore, à une distance $P P'$ sensiblement égale à $P P_1$, un point d'intersection P' avec le prolongement de la corde $P_1 P$, et que par conséquent cette courbe peut être déterminée, non-seulement par la normale en P et par le point antérieur P_1, mais tout aussi bien par cette normale et par le point postérieur P', de même qu'en P_1 la courbe $P_1 p_1 P$ est déterminée par la normale en ce point et par le point postérieur P; or il faut, abstraction faite de différences d'ordre supérieur, que dans le passage de P à P_1 les courbes correspondantes $P p' P'$ et $P_1 p_1 P$ soient non-seulement égales et semblables, mais aussi semblablement situées. Remarquons maintenant que la propriété générale, suivant laquelle la corde d'une courbe quelconque fait avec les tangentes à ses extrémités de petits angles dont le rapport a pour limite l'unité, subit une exception précisément dans les points d'inflexion, et que là l'angle en question n'a que la moitié de la valeur de l'angle immédiatement suivant (ainsi que le fera voir tout à l'heure un calcul très simple); il en résulte qu'on a angle $p P P_1 =$ angle $p' P P' =$ $\frac{1}{2}$ angle $p' P' P$ et par conséquent aussi, à une différence d'ordre supérieur près, $= \frac{1}{2}$ angle $p_1 P P_1$; de même, angle $p_1 P_1 P =$ angle $p' P P' =$ angle $p P P_1 = \frac{1}{2}$ angle $p P_1 P$. Ainsi se trouve démontrée la proposition de M. Weingarten.

2°. Mais si, après avoir considéré deux points rapprochés quelconques, on passe à la supposition qu'ils soient placés de telle sorte que leurs normales se coupent, les deux sections normales se confondent en une seule, qui dans le développement montre alors un point d'inflexion aussi bien en P qu'en P_1. Si dans ce cas particulier, tout comme dans le cas général, cette section commune, comptée à partir de P, se présentait exactement de la même manière que lorsqu'elle est prise dans le même sens à partir de P_1, on pourrait de nouveau tracer, à côté de la courbe à deux points d'inflexion en P et en P_1, une courbe égale, semblable et semblablement placée, à deux points d'inflexion en P' et en P. Mais c'est ce qui n'a pas lieu ici: prise à partir de P, la courbe est

déterminée par la normale en ce point et par la suivante en P_1; prise à partir de P_1, par la normale en ce point et par la précédente en P, puisque la normale suivante ne coupe pas celle de P_1. Il en résulte qu'en P_1 il n'y a plus à considérer une répétition de la courbe dans le même sens progressif qu'en P, mais bien dans le sens rétrograde, ce qui est d'accord avec la réduction des deux courbes à une seule.

3°. Un autre cas particulier dont il y a à tenir compte est celui où la normale au point P est coupée, non par celle du point P_1, situé à une distance finie quoique petite, mais par celle d'un autre point de la ligne géodésique, infiniment rapproché de P; en d'autres termes, le cas où la ligne géodésique est tangente à l'une des deux lignes de courbure de la surface au point P. Dans cette hypothèse, les deux points d'inflexion de la courbe $P p P_1$, tout à l'heure encore séparés par une distance finie $P P_1$, coïncident en P, où la courbe a alors trois éléments consécutifs en ligne droite. Comme dans ce cas, toutefois, la seconde intersection normale $P_1 p_1 P$, contrairement à la première, conserve son caractère général (point d'inflexion ordinaire en P_1), il paraît difficile de trouver le rapport des angles en P et P_1, sans en venir au calcul direct de ces angles eux-mêmes.

Ce qui précède peut être éclairci dans une certaine mesure par un calcul simple, qui, tout en laissant encore provisoirement indécise la valeur réelle de l'angle compris entre la ligne géodésique et la section normale, établit les relations de cet angle avec deux autres grandeurs très propres à faire ressortir la distinction des deux courbes, à savoir avec la différence de leurs longueurs et avec leur plus grande distance ou leur flèche.

1°. Par rapport à un système de coordonnées rectangulaires ayant son origine en P et pour axe des abscisses la tangente PX à la section normale développée $P p P_1$, l'équation de cette courbe près de P peut, en effet, être représentée par $y = A x^3 + B x^4 + C x^5 +$ etc. (les termes en x^4 et x^5 étant conservés

en vue des cas particuliers 2°. et 3°.), d'où il suit pour l'angle compris entre la ligne géodésique et la section normale en P: $\frac{y}{x} = A x^2 + B x^3 + C x^4 +$ etc. Cette formule, combinée avec $\frac{dy}{dx} = 3 A x^2 + 4 B x^3 + 5 C x^4 +$ etc., montre d'abord que pour un point rapproché P_1 ou (x, y) on a $\frac{y}{x} = \frac{1}{3} \frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire que l'angle en question est le tiers de l'angle de direction de la tangente en P_1, et par conséquent, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, la moitié de l'angle compris entre la ligne géodésique et la même section normale en P_1 [1]). Des valeurs trouvées pour $\frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$ il suit en outre, qu'en faisant la longueur de la ligne géodésique $PP_1 = \sigma$ et celle de la section normale $PpP_1 = \sigma'$, on a:

$$\sigma = \sqrt{(x^2+y^2)} = x \left\{ 1 + A^2 x^4 + 2AB x^5 + (B^2 + 2AC) x^6 + \text{etc.} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x + \frac{1}{2} A^2 x^5 + A B x^6 + \frac{1}{2} (B^2 + 2 A C) x^7 + \text{etc.},$$

$$\sigma' = \int_0^x dx \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}} =$$

---

1) Le fait que l'angle de la ligne géodésique et de la section normale s'élève au 2e ordre, bien que ces deux lignes ne soient pas tangentes l'une à l'autre, se trouve donc expliqué précisément par la particularité de l'existence d'une normale principale commune aux deux courbes tracées sur la surface, c'est-à-dire par la particularité du point d'inflexion P dans le développement. C'est pour n'avoir pas fait attention à cette particularité, tout en mettant en avant l'absence de contact, que M. H. Levret, dans un Mémoire publié par extrait aux *Comptes rendus*, tome LXXVI, 1873, p. 540—542, mais retiré plus tard (*ibid.* p. 822), a donné pour le sphéroïde terrestre la formule inexacte $A + z = 200 \text{ gr.} + \frac{K e^2 \sin 2L \sin 2z \cos z}{4 a \sin 1''}$ (ou dans la notation adoptée ci-dessous: $\gamma - \gamma' = \frac{1}{4} e^2 \frac{x}{a} \sin 2\varphi \sin 2\alpha \cos \alpha$), d'après laquelle l'angle en question ne serait que du 1er ordre en x.

$$=\int_0^x dx \left\{ 1+9A^2x^4+24ABx^5+(16B^2+30AC)x^6+\text{etc.} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x + \frac{9}{10}A^2x^5 + 2ABx^6 + \frac{1}{7}(8B^2+15AC)x^7 + \text{etc.}$$

et par conséquent

$$\sigma' - \sigma = \frac{2}{5}A^2x^5 + ABx^6 + \frac{1}{14}(9B^2+16AC)x^7 + \text{etc.}$$

ou, comme première approximation, $\sigma' - \sigma = \frac{2}{5}x\left(\frac{y}{x}\right)^2$, valeur qui est la même que celle donnée par M. Jordan, p. 339, sous la forme $\frac{2}{5}s(\beta-\alpha)^2$. Enfin, quant à la flèche δ, elle doit être considérée sur la surface courbe même comme une ligne géodésique, normale à la ligne géodésique donnée et à la section normale, et par conséquent dans le développement comme une ligne droite normale à l'une et à l'autre; désignant donc le point p par (x', y'), observant que l'angle pPP_1 n'est que du 2e ordre et que par conséquent le rapport des distances mesurées perpendiculairement à PP_1 et à PX ne diffère de l'unité que dans le 4e ordre, et conservant de nouveau dans y et y', en considération des cas particuliers 2°. et 3°., les termes en x^4 et en x'^4, on a:

$$\delta = \frac{y}{x}x' - y' = (Ax^2+Bx^3)x' - (Ax'^3+Bx'^4) = \text{max. en } x'.$$

Cette équation exige:

$$Ax^2+Bx^3 = 3Ax'^2+4Bx'^3,$$

d'où:

$$x' = \sqrt{\frac{x^2}{3}\left(1+\frac{B}{A}x-\frac{4B}{A}\frac{x'^3}{x^2}\right)} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}\left(1+\frac{B}{2A}x-\frac{2B}{A}\cdot\frac{\frac{1}{9}x^3\sqrt{3}}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{1}{18}\frac{B}{A}x^2(3\sqrt{3}-4),$$

et par conséquent:

$$\delta = \frac{2}{9} Ax^3 \sqrt{3} + \frac{1}{9} Bx^4 (3\sqrt{3}-1) = 0.385\, Ax^3 + 0.466\, Bx^4\,,$$

ou, comme première approximation, $\delta = 0{,}385\, y$. [1]).

2°. Pour appliquer ces résultats généraux au cas particulier mentionné ci-dessus en 2°, il faut opérer avec quelque circonspection. Jusqu'ici, en effet, les coefficients A, B, C etc. ont en réalité été supposés du même ordre de grandeur. Or cela n'a plus lieu lorsque, toujours dans l'hypothèse d'une petite distance finie PP_1, P_1, au lieu d'être un point quelconque, est lui-même, tout comme P, un point d'inflexion de la courbe PpP_1. En désignant ce point d'inflexion P_1, pour le distinguer, par (x_1, y_1), on doit y avoir $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} = 6Ax_1 + 12Bx_1^2 + 20Cx_1^3 + \text{etc.} = 0$, ce qui exige que le coefficient $A = -2Bx_1 - \frac{10}{3} Cx_1^2 - \text{etc.}$ s'élève à un ordre supérieur d'une unité à celui de B et soit comparable à x_1. Il en résulte, en premier lieu, que pour un

---

[1]) La formule approximative $\delta = Ax^2.x' - Ax'^3 = Ax'(x-x')(x+x')$ pour un point quelconque (x', y') nous apprend encore, par l'échange de x' et $x - x'$, que les segments coupés sur une ordonnée entre PpP_1 et PP_1, entre PP_1 et Pp_1P_1, et entre PpP_1 et Pp_1P_1, sont entre eux dans le rapport de $x+x'$, $2x - x'$ et $3x$, ce qui pour $x = a\sigma'$ et $x' = a\sigma$ concorde avec la formule ci-dessus $\frac{QP}{QQ'} = \frac{\sigma'+\sigma}{3\sigma'}$, donnée par M. Clarke pour les segments sur un méridien terrestre. De même, la formule plus exacte

$$\delta = (Ax^2 + Bx^3)x' - (Ax'^3 + Bx'^4) = x'(x-x')\left\{A(x+x') + B(x^2 + xx' + x'^2)\right\}$$

contient comme cas particulier la formule (15) de M. Clarke, si dans la première on substitue pour le sphéroïde terrestre (ce qui sera justifié plus loin)

$$A = \frac{1}{6}\frac{e^2 \cos^2\varphi \sin\alpha \cos\alpha}{a^2} \text{ et } B = -\frac{1}{24}\frac{e^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\alpha}{a^3},$$

si l'on y remplace δ par $QP \sin\alpha$ ou $a\,\delta u.\sin\alpha$, x par $a\sigma'$ ou $a(\sigma+\sigma_1)$, x' par $a\sigma$, φ par u, et si l'on tient compte de la formule de M. Clarke (p. 355) pour $\sin u'$.

point quelconque de l'arc PpP_1 l'ordonnée $y = -2Bx_1 x^3 + Bx^4 +$ etc., qui dans le cas général était approximativement proportionnelle à la 3e puissance de l'abscisse x, devient du 4e ordre et acquiert en outre un coefficient numérique dépendant de $\frac{x}{x_1}$ même. Ensuite, on a maintenant pour le point d'inflexion P_1 : $y_1 = -Bx_1^4 +$ etc., $\frac{y_1}{x_1} = -Bx_1^3 +$ etc. et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = -6Bx_1.x_1^2 + 4Bx_1^3 +$ etc. $= -2Bx_1^3 +$ etc., d'où l'on conclut que, concurremment avec l'élévation au 3e ordre de ces deux angles, qui dans le cas général appartenaient au 2e, l'égalité des angles de la courbe PpP_1 avec sa corde PP_1, égalité qui faisait défaut tant que le seul point P était un point d'inflexion, se trouve rétablie. De plus, la différence de longueur $\sigma' - \sigma$, que nous avons vue être du 5e ordre dans le cas général, monte maintenant au 7e: elle devient en effet, attendu que dans le coefficient du troisième terme 16 AC disparaît en présence de 9 B²:

$$\sigma' - \sigma = \frac{2}{5}.4B^2 x_1^2.x_1^5 - 2Bx_1.Bx_1^6 + \frac{9}{14}B^2 x_1^7 + \text{etc} = \frac{17}{70}B^2 x_1^7 + \text{etc.}$$

Enfin, la formule générale de la flèche ne peut plus servir directement dans le cas actuel, parce que la solution de l'équation $Ax^2 + Bx^3 = 3Ax'^2 + 4Bx'^3$, sur laquelle elle est fondée, suppose encore l'égalité d'ordre de A et de B, et que c'est aussi seulement dans cette hypothèse que les expressions de x'^2 et de x'^3, qui se déduisent de la valeur trouvée pour x', peuvent être arrêtées respectivement après le deuxième et après le premier terme et vérifier ainsi cette équation. Au lieu de l'équation réduite $Ax^2 = 3Ax'^2$, qu'on pourrait employer pour une première approximation dans le cas général, il faut prendre maintenant l'équation complète, mais sous la forme $-2Bx_1.x_1^2 + Bx_1^3 = -6Bx_1.x'^2 + 4Bx'^3$ ou $4x'^3 - 6x_1 x'^2 + x_1^3 = 0$, laquelle donne, pour la racine dont il s'agit ici, $x' = \frac{x_1}{2}$. Comme on pouvait plus ou moins s'y attendre, la flèche se place en ce cas

au milieu de la distance des deux points d'inflexion; elle acquiert d'ailleurs pour première valeur approchée:

$$\delta=\frac{y_1}{x_1}x'-y'=\frac{y_1}{2}-\left\{-2\,Bx_1\left(\frac{x_1}{2}\right)^3+B\left(\frac{x_1}{2}\right)^4\right\}=-\frac{5}{16}Bx_1^4=0.3125y_1,$$

et n'est plus du 3e, mais du 4e ordre.

3°. Dans le cas où la ligne géodésique est tangente à l'une des lignes de courbure passant par P, l'équation de la section normale développée PpP_1 prend, par rapport aux mêmes axes des coordonnées, la forme $y=Bx^4+$ etc. Sauf en ce qui concerne la différence ci-dessus trouvée des longueurs, qui par la substitution $A=0$ devient maintenant du 7e ordre, à savoir $\sigma'-\sigma=\frac{9}{14}B^2x^7+$ etc., et qui peut aussi être calculée directement au moyen de $y=Bx^4+$ etc., il paraît difficile de déduire par la même substitution les formules relatives à ce cas de celles qui se rapportent au cas général 1°. Du moins, la relation antérieure $\frac{y}{x}=\frac{1}{3}\frac{dy}{dx}$ perd sa validité et doit être remplacée, à cause de $\frac{y}{x}=Bx^3+$ etc. et de $\frac{dy}{dx}=4Bx^3+$ etc., par $\frac{y}{x}=\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$. Et quant à la formule de la flèche, bien qu'elle semble se prêter à la substitution $A=0$, elle ne donnerait pas ainsi un résultat exact, étant fondée sur la valeur trouvée pour x', laquelle devient inapplicable dans le cas actuel. On a maintenant, au contraire, l'approximation suivante:

$$\delta=\frac{y}{x}x'-y'=Bx^3x'-Bx'^4=\text{max.},$$

par conséquent

$$Bx^3-4Bx'^3=0,\; x'=\frac{1}{2}x\sqrt[3]{2},\; \delta=\frac{3}{8}Bx^4\sqrt[3]{2}=0.47\,y.$$

Par les formules qui viennent d'être développées de 1° à 3°, on est donc en état, l'angle de la ligne géodésique et de la sec-

tion normale étant connu au moyen des coefficients A, B, C etc., de calculer directement la différence de longueur et la flèche.

Si l'on veut maintenant passer au calcul effectif des angles que la ligne géodésique fait avec les deux sections normales, et se borner dans ce calcul à un certain degré d'approximation, il n'est pas nécessaire d'opérer sur la surface donnée elle-même, mais on peut de nouveau faire usage de la surface développable enveloppe que nous avons déjà menée le long de la ligne géodésique. Veut-on se contenter d'un degré d'approximation encore moindre, le moyen qui se présente le plus naturellement est de remplacer cette surface développable par une autre plus simple, à savoir par le cône ayant pour sommet le point de contact de l'arête de rebroussement avec la génératrice qui passe par le point considéré P, et pour directrice la ligne géodésique elle-même. Enfin, veut-on réduire encore davantage les prétentions à l'exactitude, on peut remplacer ce cône par le cylindre ayant la même directrice et la même génératrice, en d'autres termes, substituer au point de l'arête de rebroussement un point situé à l'infini.

Pour trouver d'une manière simple une première valeur approchée des angles en question, considérons donc d'abord (fig. 2), sur un cylindre de révolution à rayon r, deux points P et P_1 d'une hélice faisant un angle γ avec les génératrices; soit ε l'angle au centre P Q R qui correspond à ces points. La section du plan mené par la normale P Q et par le point P_1 avec le cylindre ou avec son plan tangent en P fait alors, avec la génératrice en ce dernier point, un angle γ' égal à l'angle R P_1 S que la génératrice en P_1 fait avec le plan normal désigné; cet angle est donc exprimé, attendu qu'on a $P_1 R = \text{arc } PR . \cot\gamma$, par la formule $tg\,\gamma' = \frac{r \sin\varepsilon}{r\,\varepsilon \cot\gamma} = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\, tg\,\gamma$. D'autre part, la section du plan passant par la normale $P_1 Q_1$ et par le point P, avec le cylindre ou avec son plan tangent en ce même point P, fait avec la génératrice en ce

point un angle γ'' déterminé par $tg\,\gamma'' = \frac{r\,tg\,\varepsilon}{r\,\varepsilon\,cot\,\gamma} = \frac{tg\,\varepsilon}{\varepsilon}\,tg\,\gamma$. Les tangentes des trois angles γ', γ, γ'' sont donc entre elles comme $sin\,\varepsilon$, ε, $tg\,\varepsilon$; de sorte que, pour $\varepsilon < 90°$, on a toujours $\gamma' < \gamma < \gamma''$.

Ces formules peuvent être rendues applicables à deux points peu éloignés l'un de l'autre d'un cylindre quelconque. Il faut alors, en effet, prendre pour r le rayon de courbure et pour ε le petit angle qui a pour limite l'angle de contingence de la directrice du cylindre. En développant $sin\,\varepsilon$ et $tg\,\varepsilon$, on obtient dans ce cas $tg\,\gamma' = \left(1 - \frac{1}{6}\varepsilon^2\right) tg\,\gamma$ et $tg\,\gamma'' = \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2\right) tg\,\gamma$, d'où l'on déduit:

$$\gamma - \gamma' = -\Delta\gamma = -cos^2\gamma\,\Delta.tg\gamma = cos^2\gamma\,(tg\gamma - tg\gamma') = \frac{1}{6}\varepsilon^2 sin\gamma cos\gamma = \frac{1}{12}\varepsilon^2 sin\,2\gamma,$$

et de même:

$$\gamma'' - \gamma = cos^2\gamma\,(tg\,\gamma'' - tg\,\gamma) = \frac{1}{3}\varepsilon^2\,sin\,\gamma\,cos\,\gamma = \frac{1}{6}\varepsilon^2\,sin\,2\gamma,$$

de sorte qu'on a alors toujours:

$$\gamma'' - \gamma = 2\,(\gamma - \gamma') \text{ ou } \gamma = \frac{1}{3}(2\,\gamma' + \gamma'').$$

Pour $\gamma = 0$ et pour $\gamma = 90°$, $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$ s'annulent, ainsi que cela doit être. Pour $\gamma = 45°$, ces deux différences acquièrent leurs plus grandes valeurs, savoir: $\frac{1}{12}\varepsilon^2$ et $\frac{1}{6}\varepsilon^2$.

Ce qui vient d'être trouvé pour le cylindre se laisse utiliser directement pour la surface développable considérée en premier lieu, parce qu'alors les deux génératrices de P et P_1, tout en n'étant pas rigoureusement parallèles, se coupent sous un angle si petit, que celui-ci ne pourrait avoir d'influence que si l'on désirait un degré d'approximation supérieur, le rapport des distances de ces lignes en P et en P_1 différant peu de l'unité. Les formules

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{12}\,\varepsilon^2 \sin 2\gamma \text{ et } \gamma'' - \gamma = \frac{1}{6}\,\varepsilon^2 \sin 2\gamma$$

restent donc applicables comme première approximation, à condition de regarder ε, pour une surface développable, comme l'angle des normales extrêmes de son intersection avec le plan normal de la génératrice en P, et pour une surface quelconque, comme l'angle des normales extrêmes de l'intersection de cette surface avec le plan normal de la génératrice de la surface développable déterminée par la ligne géodésique, laquelle génératrice détermine alors en même temps l'angle (aigu) γ. Comme cette génératrice est formée par l'intersection du plan tangent en P avec le plan tangent au point immédiatement suivant de la ligne géodésique, elle peut en outre être regardée comme l'intersection analogue pour ces deux mêmes points sur le paraboloïde osculateur de la surface donnée en P, et, comme telle, elle coïncide avec celui des diamètres de l'indicatrice de cette surface qui est conjugué de la tangente de la ligne géodésique, c'est-à-dire, avec la tangente conjuguée de la surface elle-même en P.

Si l'on veut se rendre encore plus spécialement compte du degré d'exactitude qu'on atteint suivant que la surface donnée est remplacée par une surface développable, par un cône ou par un cylindre, on remarquera qu'en chaque point de la ligne géodésique, sauf en P, les génératrices de la surface développable et du cylindre forment un petit angle ; deux lignes tracées sur ces surfaces, à de petites distances du même ordre prises à partir de la ligne géodésique, ont entre elles une distance qui est de l'ordre immédiatement supérieur et par conséquent négligeable, de sorte que la ligne géodésique et la section normale de la surface développable peuvent être aussi considérées comme telles pour le cylindre. Or nous venons de voir (ce qui d'ailleurs avait déjà été trouvé ci-dessus d'une manière générale) que pour le cylindre l'angle $\gamma - \gamma'$ de la ligne géodésique et de la section normale est du 2e ordre, et que par conséquent la distance de ces lignes est du 3e ordre, ce qui, dans la direction de la génératrice, pourrait aussi être établi facilement par un calcul direct. Ce résultat s'applique

donc également à la surface développable; or, à cette distance du 3e ordre, la distance entre les sections normales de la surface donnée et de la surface développable est, ainsi que nous l'avons remarqué au début, de l'ordre double, c'est-à-dire du 6e, et correspond par conséquent à un écart angulaire du 5e ordre. Il en résulte que si l'on voulait réellement approcher de l'angle $\gamma-\gamma'$ jusqu'au 5e ordre, le calcul devrait être exécuté pour la surface donnée elle-même, et non pour quelque surface auxiliaire; veut-on au contraire se contenter du 4e ordre, la surface développable enveloppe peut être substituée à la surface donnée. Si l'on considère ensuite que le remplacement de cette surface développable par le cône dont il a été question ci-dessus reviendrait à négliger de petites parties des génératrices successives près de l'arête de rebroussement, par rapport aux parties qui s'étendent jusqu'à la directrice, on paraît autorisé à conclure que ce remplacement abaisse de nouveau d'une unité le degré d'exactitude et fait donc connaître l'angle $\gamma-\gamma'$ jusqu'au 3e ordre inclusivement. En substituant enfin des génératrices infinies aux génératrices finies, c'est-à-dire en passant du cône au cylindre, on peut admettre qu'on perd encore *un* degré d'exactitude, et que par conséquent l'angle du 2e ordre ci-dessus trouvé pour le cylindre n'est, pour une surface quelconque, exact que jusqu'à ce 2e ordre. On pourrait encore ajouter, en poussant aussi loin que possible la simplification graduelle des surfaces, que le remplacement de la ligne géodésique elle-même par sa tangente en P, c'est-à-dire du cylindre par le plan tangent, donnerait une valeur exacte jusqu'au 1er ordre: en effet, l'angle en question, du 2e ordre dans le cas général, devient rigoureusement nul pour le plan. Ces résultats sont d'accord avec la remarque que le plan, le cylindre, le cône et la surface développable, en tant que pour cette dernière la connaissance de l'arête de rebroussement serait ici requise, sont déterminables respectivement par les plans tangents en un, deux, trois et quatre points consécutifs de la ligne géodésique.

Supposons maintenant que, renonçant, à cause de sa trop grande

complication, à l'approximation jusqu'au 4e ordre par la surface développable, on veuille par contre, au moyen du cône, développer le calcul jusqu'au 3e ordre, on pourra, de même qu'on l'a fait ci-dessus pour le cylindre, simplifier l'opération en choisissant un cône de révolution. Comme sommet de ce cône il conviendra de prendre le point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface développable, c'est-à-dire le point d'intersection des plans tangents à la surface donnée en trois points consécutifs de la ligne géodésique; comme axe de révolution on pourra employer la droite qui fait des angles égaux avec ces trois plans, c'est-à-dire l'intersection des plans bissecteurs intérieurs de leurs angles dièdres. Dans l'hypothèse que l'arc PP_1 soit suffisamment petit, l'écart entre le cône réel et ce cône de révolution sera de nouveau négligeable. Faisons maintenant (fig. 3) les génératrices $TP = l$ et $TP_1 = l_1$, le demi-angle au sommet $PTQ = P_1TQ = \beta$, et l'angle au centre $POR = \varepsilon$; en premier lieu, la ligne géodésique PP_1 forme alors, dans le développement du cône, le côté d'un triangle PTP_1, dont l'angle opposé est égal à $\frac{arc\,PR}{TP} = \frac{\varepsilon.\,OP}{TP} = \varepsilon \sin\beta$, et où l'on a par conséquent $l : l_1 = \sin(\gamma + \varepsilon \sin\beta) : \sin\gamma$. Ensuite, les angles γ' et γ'' sont déterminés par les intersections respectives du plan passant par la normale PQ et par le point P_1 et du plan passant par la normale P_1Q_1 et par le point P avec le plan tangent en P, c'est-à-dire par les points d'intersection p' et p'' de ce dernier plan avec la droite menée par P_1 parallèlement à PQ et avec la droite P_1Q_1 elle-même. Or, par rapport aux droites perpendiculaires PQ, PS et PT, prises pour axes, les coordonnées de P_1 sont: $\{l_1 \sin\beta(1-\cos\varepsilon)\cos\beta,\ l_1 \sin\beta \sin\varepsilon,\ (l-l_1) + l_1 \sin\beta(1-\cos\varepsilon)\sin\beta\}$, et celles de Q_1, comme intersection de la normale en R_1 avec l'axe du cône: $\{l_1\, tg\,\beta,\ 0,\ l-l_1\}$. Des premières coordonnées il résulte:

$$tg\gamma' = \frac{l_1 \sin\beta \sin\varepsilon}{(l-l_1)+l_1 \sin^2\beta(1-\cos\varepsilon)} = \frac{\sin\gamma \sin\beta \sin\varepsilon}{\sin(\gamma+\varepsilon\sin\beta) - \sin\gamma + \sin\gamma \sin^2\beta(1-\cos\varepsilon)},$$

ou, pour de petites valeurs de ε, jusqu'au 3e ordre inclusivement:

$$tg\,\gamma' = \frac{\sin\gamma\,\sin\beta\,(\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3)}{\sin\gamma(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\beta+\frac{1}{24}\varepsilon^4\sin^4\beta)+\cos\gamma\,(\varepsilon\sin\beta-\frac{1}{6}\varepsilon^3\sin^3\beta) - \sin\gamma + \sin\gamma\,(\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{24}\varepsilon^4)\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{(1-\frac{1}{6}\varepsilon^2)\sin\gamma}{\cos\gamma - \frac{1}{6}\varepsilon^2\cos\gamma\sin^2\beta - \frac{1}{24}\varepsilon^3\sin\gamma\sin\beta\cos^2\beta} =$$

$$= tg\,\gamma - \frac{1}{6}\varepsilon^2 tg\,\gamma\cos^2\beta + \frac{1}{24}\varepsilon^3\,tg^2\gamma\sin\beta\cos^2\beta.$$

En combinant les deux systèmes de coordonnées, et en déterminant l'intersection p'' de $P_1\,Q_1$ ou de

$$\frac{X - l_1\,tg\,\beta}{\sin\beta\,(1-\cos\varepsilon)\cos\beta - tg\,\beta} = \frac{Y}{\sin\beta\,\sin\varepsilon} = \frac{Z-(l-l_1)}{\sin^2\beta\,(1-\cos\varepsilon)}$$

avec le plan tangent $X=0$, on trouve:

$$tg\,\gamma'' = \frac{Y}{Z} = \frac{-\,l_1\,tg\,\beta\sin\beta\sin\varepsilon}{(l-l_1)\,\{\sin\beta\cos\beta\,(1-\cos\varepsilon) - tg\beta\} - l_1\,tg\beta\sin^2\beta\,(1-\cos\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\sin\gamma\,\sin\beta\,\sin\varepsilon}{\{\sin(\gamma+\varepsilon\sin\beta)-\sin\gamma\}\,\{1-\cos^2\beta(1-\cos\varepsilon)\} + \sin\gamma\sin^2\beta(1-\cos\varepsilon)}$$

ou, pour de petites valeurs de ε:

$$tg\gamma'' = \frac{\sin\gamma\,\sin\beta\,(\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3)}{\left\{\sin\gamma(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\beta+\frac{1}{24}\varepsilon^4\sin^4\beta)+\cos\gamma(\varepsilon\sin\beta-\frac{1}{6}\varepsilon^3\sin^3\beta)-\sin\gamma\right\}\left\{1-(\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{24}\varepsilon^4)\cos^2\beta\right\} + \sin\gamma\,(\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{24}\varepsilon^4)\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{(1-\frac{1}{6}\varepsilon^2)\sin\gamma}{\cos\gamma - (\frac{1}{6}\varepsilon^2\cos\gamma\sin^2\beta + \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos\gamma\cos^2\beta) + \frac{5}{24}\varepsilon^3\sin\gamma\sin\beta\cos^2\beta} =$$

$$= tg\,\gamma + \frac{1}{3}\varepsilon^2\,tg\,\gamma\cos^2\beta - \frac{5}{24}\varepsilon^3\,tg^2\gamma\sin\beta\cos^2\beta.$$

On reconnaît en outre qu'on a maintenant jusqu'au 3e ordre inclusivement, de même qu'on l'avait ci-dessus jusqu'au 2e pour le cylindre:

$$\gamma-\gamma'=\cos^2\gamma(tg\gamma-tg\gamma'),\text{donc}=\frac{1}{6}\varepsilon^2 \sin\gamma\cos\gamma\cos^2\beta-\frac{1}{24}\varepsilon^3\sin^2\gamma\sin\beta\cos^2\beta,$$

et

$$\gamma''-\gamma=\cos^2\gamma(tg\gamma''-tg\gamma),\text{donc}=\frac{1}{3}\varepsilon^2 \sin\gamma\cos\gamma\cos^2\beta-\frac{5}{24}\varepsilon^3\sin^2\gamma\sin\beta\cos^2\beta.$$

Pour $\beta = 0$ ces formules se réduisent à celles que nous avons obtenues précédemment. En général, tant qu'on se borne au 2e ordre, elles donnent comme précédemment: $\gamma'' - \gamma = 2(\gamma - \gamma')$, au moins dans la supposition que γ ne soit pas trop voisin de 90°. Si au contraire ce cas se présente, si l'on a par exemple $\gamma = 90° - k\varepsilon$, ce qui conduit à poser $\sin\gamma = \cos k\varepsilon = 1$ et $\cos\gamma = \sin k\varepsilon = k\varepsilon$, on a jusqu'au 3e ordre: $\gamma - \gamma' = \frac{1}{24}\varepsilon^3 \cos^2\beta\ (4k - \sin\beta)$ et $\gamma'' - \gamma = \frac{1}{24}\varepsilon^3 \cos^2\beta\ (8k - 5\sin\beta)$, de sorte qu'alors le rapport $\frac{\gamma''-\gamma}{\gamma-\gamma'} = \frac{8k - 5\sin\beta}{4k - \sin\beta}$ dépend bien dûment de k et par conséquent de la grandeur absolue des angles $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$ mêmes. Quant aux conséquences spéciales qui à ce sujet pourraient être déduites dès à présent, je renvoie, pour ne pas tomber dans des redites, à la suite de ce travail, là où je m'occuperai du calcul sur la surface quelconque elle-même; je me contente de noter ici que les cas particuliers mentionnés plus haut en 2° et en 3° correspondent respectivement aux hypothèses $k = \frac{1}{2}\sin\beta$ et $k = 0$, pour lesquelles le rapport $\frac{\gamma''-\gamma}{\gamma-\gamma'}$ devient -1 ou $+5$.

Au lieu d'exprimer les angles $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$ en fonction de l'angle ε sur l'axe du cône, on peut aussi les déterminer au moyen de l'angle ω que les tangentes à la ligne géodésique en

P et en P_1 font entre elles et qui a pour limite l'angle de contingence de cette ligne elle-même. Ces tangentes, situées respectivement dans les plans tangents en P et en P_1, dont l'intersection TU fait de part et d'autre des angles égaux à $\text{arc}\,tg\left(\sin\beta\,tg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)$ avec les génératrices TP et TP_1, forment avec cette intersection les angles $\gamma + \text{arc}\,tg\left(\sin\beta\,tg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)$ et $(\gamma + \varepsilon\sin\beta) - \text{arc}\,tg\left(\sin\beta\,tg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)$, dont la différence $-\varepsilon\sin\beta + 2\,\text{arc}\,tg\left(\sin\beta\,tg\frac{1}{2}\,\varepsilon\right) = -\varepsilon\sin\beta + 2\sin\beta\left(\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{24}\varepsilon^3\right) - \frac{2}{3}\sin^3\beta.\ \frac{1}{8}\,\varepsilon^3 = \frac{1}{12}\varepsilon^3\sin\beta\cos^2\beta$ est du 3e ordre. Il en résulte que, lorsqu'on se propose d'exprimer ω en ε, ou vice-versa, seulement jusqu'au 2e ordre, ces angles des tangentes avec TU peuvent être censés égaux chacun à $\gamma + \frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\beta$. Or, s'il en est ainsi, ils se présentent comme les côtés égaux d'un triangle sphérique isoscèle, dont l'angle inclus ψ est l'angle des deux plans tangents et dont le troisième côté est égal à ω, de sorte qu'on a $\sin\frac{1}{2}\,\omega = \sin\frac{1}{2}\,\psi\sin\left(\gamma + \frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\beta\right)$. Un second triangle sphérique isoscèle, déterminé par l'axe du cône et par les perpendiculaires abaissées d'un de ses points sur les deux plans tangents, et ayant par conséquent l'angle ε entre les deux côtés égaux $90° - \beta$ et en outre ψ pour troisième côté, donne de même: $\sin\frac{1}{2}\,\psi = \sin\frac{1}{2}\,\varepsilon.\cos\beta$. On a donc $\sin\frac{1}{2}\,\omega = \sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\cos\beta\sin\left(\gamma + \frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\beta\right)$ ou, jusqu'au 2e ordre inclusivement, $\omega = \varepsilon\cos\beta\left(\sin\gamma + \frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\beta\cos\gamma\right)$, d'où l'on déduit réciproquement:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\sin\gamma\cos\beta} - \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{\cos\gamma\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\omega}{\sin\gamma\cos\beta} - \frac{\omega^2}{2}\,\frac{\cos\gamma\sin\beta}{\sin^3\gamma\cos^2\beta}.$$

La substitution de cette valeur dans celles qui ont été trouvées pour $\gamma - \gamma'$ et pour $\gamma'' - \gamma$ donne ensuite:

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{6}\,\omega^2 \cot\gamma - \frac{1}{24}\,\omega^3 \frac{\sin\beta\,(\sin^2\gamma + 4\cos^2\gamma)}{\sin^3\gamma\cos\beta}$$

et

$$\gamma'' - \gamma = \frac{1}{3}\,\omega^2 \cot\gamma - \frac{1}{24}\,\omega^3 \frac{\sin\beta\,(5\sin^2\gamma + 8\cos^2\gamma)}{\sin^3\gamma\cos\beta}.$$

Bien que les derniers termes de ces expressions soient plus compliqués que ceux des formes primitives en ε, les premiers termes, auxquels se réduiraient de nouveau ces valeurs pour le cylindre, sont en revanche plus simples. Aussi n'est-il pas difficile, dans le cas du cylindre, de trouver ces valeurs directement, et même encore plus rapidement qu'on n'a pu le faire ci-dessus en fonction de ε. Pour cela, on n'a qu'à regarder la ligne géodésique PP_1 (fig. 4) comme un petit arc de son cercle osculateur, arc dont le rayon sera $OP = OP_1 = R$ et l'angle au centre $POP_1 = \omega$. (Si l'on construit le triangle P_1RS normal à OP, on reconnaît que, entre le rayon de courbure R et le rayon de courbure ci-dessus considéré $QP = QR = r$ de la projection PR de la ligne géodésique ou de la directrice du cylindre, existe, comme première approximation, le rapport $\frac{R}{r} = \frac{2R\,.\,PS}{2r\,.\,PS} = \frac{P_1S^2}{RS^2} = \frac{1}{\sin^2\gamma}$, dont la division par $\frac{R\omega}{r\varepsilon} = \frac{P_1S}{RS} = \frac{1}{\sin\gamma}$ donne de nouveau la valeur approchée $\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{1}{\sin\gamma}$ pour le cas de $\beta = 0$). Mais, sans introduire maintenant r et ε, il suffit de remarquer que les intersections P_1S et P_1S' du plan osculateur OPP_1 de la ligne géodésique avec le plan P_1RS parallèle au plan tangent du cylindre en P et avec le plan tangent P_1RS' lui-même en P_1 font respectivement, avec la génératrice P_1R, un angle égal à γ' et un angle qui (à raison de la petite distance PP_1 des points de contact de ces deux plans) ne diffère de γ'' que dans un ordre supérieur. Si donc les triangles rectangles P_1RP (celui-ci à côtés courbes),

$P_1 R S$ et $P_1 R S'$, qui ont pour hypoténuses $R\omega$, $R \sin\omega$ et $R\, tg\,\omega$, sont rabattus dans un même plan (fig. 5) autour du côté commun $P_1 R$, et que de P_1 comme centre on décrive un petit arc de rayon $P_1 P = R\omega$, qui détermine par conséquent sur les deux autres hypoténuses les segments $R\omega - R\sin\omega$ et $R\, tg\,\omega - R\omega$, la figure montre immédiatement qu'on a, comme ci-dessus: $\gamma - \gamma' = \dfrac{(R\omega - R\sin\omega)\cot\gamma}{R\omega} = \dfrac{1}{6}\omega^2 \cot\gamma$ et

$$\gamma'' - \gamma = \frac{(R\, tg\,\omega - R\omega)\cot\gamma}{R\omega} = \frac{1}{3}\omega^2 \cot\gamma.$$

Plus haut il a déjà été question de la détermination du sommet et de l'axe du cône de révolution qui se laisse substituer à la surface développable enveloppe. Si l'on voulait exécuter à ce sujet un calcul général, le plan tangent au point P ou (x, y, z) de la surface donnée $dz = p\,dx + q\,dy$ pourrait être représenté par $U = p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0$, et la distance d'un point (X, Y, Z) à ce plan, en coordonnées rectangulaires, par $\dfrac{U}{\sqrt{(p^2+q^2+1)}}$. Le sommet du cône, considéré comme point d'intersection de trois plans tangents consécutifs, est alors déterminé par le système $U = 0$, $dU = 0$, $d^2 U = 0$; l'axe du cône, comme lieu géométrique des points situés à la même distance des trois plans, par le système $d\left(\dfrac{U}{\sqrt{(p^2+q^2+1)}}\right) = 0$, $d^2\left(\dfrac{U}{\sqrt{(p^2+q^2+1)}}\right) = 0$. Dans le calcul de ces différentielles, X, Y, Z entrent comme constantes, et x, y, z comme variables liées d'une part par la relation $dy = A\,dx$, d'où $dz = p dx + q dy = (p + Aq)\,dx$, qui détermine la direction de la ligne géodésique, et d'autre part par l'équation différentielle de cette ligne, exprimant la propriété fondamentale que le point $(x + 2\,dx + d^2 x,\ y + 2\,dy + d^2 y,\ z + 2\,dz + d^2 z)$ doit être pris dans le plan déterminé par le point (x, y, z) et par la normale au point $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$. Si l'on remarque toutefois que dans les valeurs de $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$ pour le cône, les longueurs l et l_1, qui fixent

le sommet et la position de l'axe, ont disparu, on reconnaît que, en ce qui concerne ce calcul, il suffirait de déterminer le demi-angle au sommet β et l'angle γ.

Au lieu de nous livrer à ce calcul, toutefois, nous allons aborder l'étude analytique de la question considérée par rapport à la surface donnée elle-même. En prenant pour axe des x d'un système de coordonnées rectangulaires la tangente en P à la ligne géodésique, et pour axe des z la normale à la surface, l'équation de cette surface, au voisinage de l'origine P, est, d'après le théorème de Taylor:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(ux^3 + 3vx^2y + 3v_1xy^2 + u_1y^3) +$$

$$+ \frac{1}{24}(u'x^4 + 4v'x^3y + 6w'x^2y^2 + 4v'_1xy^3 + u'_1y^4) + \frac{1}{120}(u''x^5 + \text{etc.}) + \text{etc.},$$

où entrent comme coefficients les valeurs que les coefficients différentiels partiels successifs de z par rapport à x et à y prennent à l'origine. La projection de la ligne géodésique sur le plan X Y, lequel est perpendiculaire à son plan osculateur X Z en P, présentera, d'après une propriété générale, un point d'inflexion en P même, et aura par conséquent une équation de la forme $y = Ax^3 + Bx^4 + \text{etc.}$, ainsi qu'il ressort aussi de ce que, si la valeur de y commençait par un terme $A_0 x^2$, la projection sur Y Z serait $z = \frac{r}{2A_0} y + \text{etc.}$, de sorte que le plan osculateur ne passerait pas par la normale P Z. Si $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ représentent les coefficients différentiels partiels tirés de l'équation de la surface, on aura, pour calculer les coefficients indéterminés A, B, etc., l'équation (qu'on peut aussi, si on le veut, déduire analytiquement):

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{dy}{dx} & \frac{dz}{dx} \\ 0 & \frac{d^2y}{dx^2} & \frac{d^2z}{dx^2} \\ \left(\frac{dz}{dx}\right) & \left(\frac{dz}{dy}\right) & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime la propriété fondamentale d'après laquelle un même plan (dont les coefficients de direction ont été éliminés) comprend les trois droites suivantes: 1° la tangente à la ligne géodésique, 2° la diagonale du parallélogramme construit sur les deux éléments adjacents $\left(\pm\, dx,\ \pm\, dy + \frac{1}{2}\, d^2y,\ \pm\, dz + \frac{1}{2}\, d^2z\right)$ de cette ligne (dx étant supposé constant), et 3° la normale à la surface, droites dont les cosinus de direction sont respectivement proportionnels aux éléments de la 1e, 2e et 3e ligne du déterminant ci-dessus. La même propriété est encore exprimée par l'équation développée

$$\left(-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}=0,\,..(1)$$

d'après laquelle le plan osculateur de la ligne géodésique, plan dont les coefficients de direction sont proportionnels aux aires $-dy\,d^2z+$ $+dz\,d^2y$, $dx\,d^2z$, $-dx\,d^2y$ des projections du parallélogramme susdit, est perpendiculaire au plan tangent à la surface, plan dont les coefficients de direction sont proportionnels à $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, -1.

En limitant le calcul aux deux premiers termes de $y = Ax^3 +$ $+ Bx^4 +$ etc., on a pour le dernier terme de l'équation (1): $\frac{d^2y}{dx^2} = 6\,A\,x + 12\,B\,x^2$, de sorte qu'alors les puissances 3e et supérieures de x deviennent superflues dans tous les termes de cette équation. Or $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ commençant tous les deux par la 1e puissance, y et z respectivement par la 3e et la 2e

puissance, et conséquemment le premier terme de (1) par la 3e puissance de x, ce terme peut en ce cas être négligé et l'équation être réduite à:

$$\frac{d^2 z}{dx^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{d^2 y}{dx^2}=0\,,\quad\ldots\ldots\quad(1')$$

où il faut prendre, également jusqu'en x^2, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=sx+\frac{1}{2}vx^2$.

Il devient alors nécessaire de tenir compte de $\frac{d^2 z}{dx^2}$ jusqu'en x, ce qui oblige de prendre jusqu'en x^3 l'ordonnée z de la ligne géodésique, ordonnée qu'on trouve par la substitution de y dans l'équation de la surface et qui devient ainsi: $z=\frac{1}{2}rx^2+\frac{1}{6}ux^3$, d'où $\frac{d^2 z}{dx^2}=r+ux$. Les deux coefficients indéterminés A et B seront donc fournis par l'équation $(r+ux)\left(sx+\frac{1}{2}vx^2\right)+$ $+(6\,\mathrm{A}x+12\,\mathrm{B}x^2)=0$, qui donne $6\,\mathrm{A}+rs=0$ et $12\,\mathrm{B}+$ $+\left(\frac{1}{2}rv+su\right)=0$, montrant que la ligne géodésique se projette, sur le plan XY adopté, suivant:

$$y=-\frac{1}{6}rsx^3-\frac{1}{24}(rv+2su)x^4+\text{etc.}$$

Si maintenant (x, y, z) est plus spécialement le point extrême P_1 de la ligne géodésique, l'angle représenté ci-dessus par $\gamma-\gamma'$, que cette ligne fait en P avec la section de la surface par le plan normal en P et passant par P_1, devient:

$$\mp(\gamma-\gamma')=\frac{y}{x}=-\frac{1}{6}rsx^2-\frac{1}{24}(rv+2su)x^3+\text{etc.}\,,\quad.\ (2)$$

où l'on doit prendre, attendu que l'angle γ a été supposé aigu, le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que r et s ont le même signe ou des signes différents.

Quant à l'angle que la ligne géodésique fait en P avec la section normale en P_1 et passant par P, il peut être trouvé au moyen du point d'intersection de la normale $\frac{X-x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{Y-y}{\left(\frac{dz}{dy}\right)} =$ $= -(Z-z)$ et du plan tangent $Z=0$, c'est-à-dire au moyen du point $\Big\{ X = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = x + \frac{1}{2}rx^2 \,.\, rx + \text{etc.} = x + \text{etc.},$

$$Y = y + z\left(\frac{dz}{dy}\right) = (Ax^3 + Bx^4 + \text{etc.}) + \left(\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{6}ux^3\right)\left(sx + \frac{1}{2}vx^2\right) =$$

$$= \left(A + \frac{1}{2}rs\right)x^3 + \left(B + \frac{1}{4}rv + \frac{1}{6}su\right)x^4 + \text{etc.} =$$

$= \frac{1}{3}rsx^3 + \frac{1}{24}(5rv + 2su)x^4 + \text{etc.}\Big\}$. Il en résulte en effet pour l'angle en question:

$$\pm(\gamma'' - \gamma) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{3}rsx^2 + \frac{1}{24}(5rv + 2su)x^3 + \text{etc.} \;\; . \; . \; (3).$$

Dans toutes ces formules on peut remplacer x par σ, attendu que $\frac{dy}{dx}$ est du 2e ordre et $\frac{dz}{dx}$ du 1er, et que par conséquent la longueur $\sigma = \int_0^x dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}$ de la ligne géodésique elle-même ne diffère de l'abscisse x que dans le 3e ordre. Mais cela n'aurait plus lieu si l'on avait voulu calculer y et z pour la ligne géodésique jusqu'au 5e degré de x: dans ce cas, où l'on aurait aussi dû partir non de l'équation différentielle réduite (1′) de cette ligne, mais de l'équation complète (1), on aurait trouvé les formules suivantes, dans lesquelles, toutefois, la loi des coefficients ne paraît pas très simple:

$$y = -\frac{1}{6}rsx^3 - \frac{1}{24}(rv + 2su)x^4 + \frac{1}{120}\left\{rs(3r^2 + rt + 12s^2) - \right.$$
$$\left. - 3(su' + uv)\right\}x^5 + \text{etc.}$$

$$z = \frac{1}{2} r x^2 + \frac{1}{6} u x^3 - \frac{1}{24}(4rs^2 - u')x^4 - \frac{1}{120}\{5s(3rv+2su) - u''\}x^5 + \text{etc.}$$

$$X = x + \frac{1}{2} r^2 x^3 + \text{etc.}$$

$$Y = \frac{1}{3} r s x^3 + \frac{1}{24}(5rv + 2su)x^4 - \frac{1}{120}\{rs(-3r^2 + 9rt + 8s^2) -$$
$$- (2su' + 7uv + 10rv')\}x^5 + \text{etc.}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{3} r s x^2 + \frac{1}{24}(5rv + 2su)x^3 - \frac{1}{120}\{rs(17r^2 + 9rt + 8s^2) -$$
$$- (2su' + 7uv + 10rv')\}x^4 + \text{etc.}$$

Des deux premières, on déduirait:

$$\sigma = \int_0^x dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} = x + \frac{1}{6} r^2 x^3 + \frac{1}{8} r u x^4 -$$
$$- \frac{1}{120}(3r^4 + 13r^2s^2 - 4ru' - 3u^2)x^5 - \frac{1}{144}(6r^3u + 13r^2sv + 14rs^2u -$$
$$- ru'' - 2uu')x^6 + \text{etc.},$$

et de celle-ci, par inversion:

$$x = \sigma - \frac{1}{6} r^2 \sigma^3 - \frac{1}{8} r u \sigma^4 + \frac{1}{120}(13r^4 + 13r^2s^2 - 4ru' - 3u^2)\sigma^5 +$$
$$+ \frac{1}{144}(27r^3u + 13r^2sv + 14rs^2u - ru'' - 2uu')\sigma^6 + \text{etc.}$$

$$y = -\frac{1}{6} r s \sigma^3 - \frac{1}{24}(rv + 2su)\sigma^4 + \frac{1}{120}\{rs(13r^2 + rt + 12s^2) -$$
$$- 3(su' + uv)\}\sigma^5 + \text{etc.}$$

$$z = \frac{1}{2} r \sigma^2 + \frac{1}{6} u \sigma^3 - \frac{1}{24}\{4r(r^2 + s^2) - u'\}\sigma^4 - \frac{1}{120}\{25r^2u +$$
$$+ 5s(3rv + 2su) - u''\}\sigma^5 + \text{etc.},$$

et de même les angles $\frac{y}{x}$ et $\frac{Y}{X}$ pourraient être représentés en σ [1]). On pourrait encore chercher la longueur de l'intersection de la sur-

---

1) Ces trois dernières formules pour les coordonnées x, y, z, et par suite toutes les formules précédentes, auraient aussi, au moyen de coefficients indéterminés, pu être établies d'embleé en σ au lieu d'en x; il eût suffi de partir de l'équation $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy - dz = 0$ de la surface, ou bien de la relation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2$, l'une ou l'autre combinée avec les équations différentielles $\frac{d^2x}{\left(\frac{dx}{dz}\right)} = \frac{d^2y}{\left(\frac{dz}{dy}\right)} = -d^2z$ qui, pour $d\sigma$ constant, représentent la ligne géodésique; elles en expriment, en effet, la propriété fondamentale, à savoir que sa normale principale, c'est-à-dire la diagonale du losange construit sur les éléments adjacents égaux $\pm d\sigma$ ou $\left(\pm dx + \frac{1}{2} d^2x,\ \pm dy + \frac{1}{2} d^2y,\ \pm dz + \frac{1}{2} d^2z\right)$, normale dont les cosinus de direction sont par conséquent proportionnels à d^2x, d^2y, d^2z, coïncide avec la normale à la surface, dont les cosinus de direction sont proportionnels à $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, -1. Que ces quatre équations, servant à résoudre x, y et z en σ, sont réellement connexes entre elles, cela ressort de ce que la première multipliée terme à terme par les trois dernières valeurs égales, donne la différentielle $dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0$ de la seconde équation dans l'hypothèse de $d\sigma$ constant. Il serait, de plus, facile de se convaincre que dans l'égalité des valeurs susdites est impliquée l'équation différentielle (1), employée ci-dessus pour le cas de dx constant, et qui exprime seulement que le plan osculateur de la ligne géodésique passe par la normale à la surface: il suffirait de remarquer que, si l'on prend d^2x, d^2y, d^2z dans leur acception la plus générale, affranchies de la condition de se rapporter à une valeur constante de $d\sigma$, alors, dans l'équation

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \left(\frac{dz}{dx}\right) & \left(\frac{dz}{dy}\right) & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

les éléments de la seconde ligne sont pour la tangente proportionnels à ceux de la première, et pour la normale principale, témoin les valeurs égales déjà itérativement mentionnées, proportionnels à ceux de la troisième ligne; que par conséquent cette équation représente en général le plan déterminé par la tangente et par la normale principale, c'est-à-dire le plan osculateur, mais qu'en outre, par l'introduction de l'hypothèse $d^2x = 0$, elle se transforme dans l'équation (1).

face donnée $Z = \frac{1}{2}(rX^2 + 2sXY + \text{etc.}) + \frac{1}{6}(uX^3 + 3vX^2Y +$ $+ \text{etc.}) + \frac{1}{24}(u'X^4 + \text{etc.}) + \frac{1}{120}(u''X^5 + \text{etc.}) + \text{etc.}$ et du plan $Y = \frac{y}{x}X = \left\{ -\frac{1}{6}rsx^2 - \frac{1}{24}(rv + 2su)x^3 + \text{etc.} \right\} X$, passant par la normale en P et par P_1 (x étant alors regardée comme constante, X, Y, Z comme variables). On obtiendrait ainsi:

$$\sigma' = x + \frac{1}{6}r^2x^3 + \frac{1}{8}rux^4 - \frac{1}{360}(9r^4 + 35r^2s^2 - 12ru' - 9u^2)x^5 -$$

$$- \frac{1}{144}(6r^3u + 12r^2sv + 12rs^2u - ru'' - 2uu')x^6 + \text{etc.},$$

et par conséquent $\sigma' - \sigma = \frac{1}{90}r^2s^2x^5 + \frac{1}{144}rs(rv + 2su)x^6 + \text{etc.}$, résultat conforme à celui que nous avons déjà trouvé, d'une manière beaucoup plus simple et avec un plus grand degré d'approximation, en employant la surface développable enveloppe; au moyen de l'équation dans le plan, $y = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + \text{etc.}$, nous avons alors obtenu l'expression:

$$\sigma' - \sigma = \frac{2}{5}A^2x^5 + ABx^6 + \frac{1}{14}(9B^2 + 16AC)x^7 + \text{etc.},$$

dans laquelle — attendu que $\frac{y}{x}$ représente le même angle sur la surface elle-même et sur le développement, tandis que les abscisses x, comme on l'a vu, ne diffèrent pour ces deux cas respectivement que dans le 3e et dans le 5e ordre de la longueur σ de la ligne géodésique, — il y a seulement, suivant (2), à substituer $A = -\frac{1}{6}rs$ et $B = -\frac{1}{24}(rv + 2su)$. Si l'on voulait en outre comparer les longueurs σ et σ' de la ligne géodésique et de la section normale en P, telles qu'elles viennent d'être calculées sur la surface et exprimées en x, avec la longueur de la corde PP_1, on trouverait à cet effet, pour cette dernière:

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = x + \frac{1}{8} r^2 x^3 + \frac{1}{12} r u x^4 - \frac{1}{1152}(9r^4 + 80 r^2 s^2 -$$

$$- 24 r u' - 16 u^2) x^5 - \frac{1}{1440}(15 r^3 u + 80 r^2 s v + 80 r s^2 u -$$

$$- 6 r u'' - 10 u u') x^6 + \text{etc.}$$

Quand on se borne aux formules (2) et (3), celles-ci donnent déjà les angles compris entre la ligne géodésique et les deux sections normales avec un degré d'approximation de plus que les formules correspondantes de M. Weingarten pour $\alpha - \beta$ (ici $\pm(\gamma - \gamma')$) et pour $(\beta') - \beta$ (ici $\pm(\gamma'' - \gamma) = \pm((\gamma'' - \gamma) + (\gamma - \gamma'))$), à savoir:

$$\alpha - \beta = -\frac{1}{6}\sigma^2 (r_0 \cos^2\beta + t_0 \sin^2\beta)(r_0 - t_0) \sin\beta \cos\beta \text{ et}$$

$$(\beta) - \beta = -\frac{1}{2}\sigma^2 (r_0 \cos^2\beta + t_0 \sin^2\beta)(r_0 - t_0) \sin\beta \cos\beta;$$

les nôtres ont en outre une forme plus concise. Ce dernier avantage devient surtout manifeste si l'on passe des formules (2) et (3) à celles qui leur correspondraient sur les axes des coordonnées employés par M. Weingarten, c'est-à-dire si l'on prend pour axes des X et des Y les tangentes aux deux sections principales de la surface qui passent par P, auquel cas la ligne géodésique, la section normale en P et la section normale en P_1 font respectivement avec l'axe des X les angles α, β et (β). En désignant les coordonnées de M. Weingarten par x' et y', on doit alors, dans son équation de la surface développée jusqu'au 3e ordre, soit

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x'^2 + t_0 y'^2) + \frac{1}{6}(u_0 x'^3 + 3 v_0 x'^2 y' + 3 v'_0 x' y'^2 + u'_0 y'^3) + \text{etc.},$$

substituer $x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha$ et $y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha$, ce qui, pour l'équation employée par nous,

$$z = \frac{1}{2}(r x^2 + 2 s x y + \text{etc.}) + \frac{1}{6}(u x^3 + 3 v x^2 y + \text{etc.}) + \text{etc.},$$

conduit à:

$$\left.\begin{array}{l} r = r_0 \cos^2 \alpha + t_0 \sin^2 \alpha, \dots\dots\dots\dots \\ s = -(r_0 - t_0) \sin \alpha \cos \alpha, \dots\dots\dots\dots \\ u = u_0 \cos^3 \alpha + 3v_0 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 3v'_0 \sin^2 \alpha \cos \alpha + u'_0 \sin^3 \alpha, \\ v = -u_0 \sin\alpha\cos^2\alpha + v_0 \cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) + v'_0 \sin\alpha(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \\ \qquad + u'_0 \sin^2 \alpha \cos \alpha. \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (4)$$

Ces valeurs, dont la première exprime la relation d'Euler entre les courbures des sections normales, donnent d'abord:

$$A = -\frac{1}{6} rs = +\frac{1}{6} (r_0 \cos^2 \alpha + t_0 \sin^2 \alpha)(r_0 - t_0) \sin \alpha \cos \alpha$$

conformément à la formule de M. Weingarten pour α---β (sauf remplacement de α par β et de x par σ), et d'autre part, si cette formule est prolongée seulement jusqu'à l'ordre immédiatement supérieur, le coefficient très complexe:

$$B = -\frac{1}{24}(rv + 2su) = -\frac{1}{24}\Big\{ -3 r_0 u_0 \sin \alpha \cos^4 \alpha +$$
$$+ r_0 v_0 \cos^3 \alpha (\cos^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha) + r_0 v'_0 \sin\alpha \cos^2\alpha (2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha) +$$
$$+ r_0 u'_0 \sin^2\alpha \cos\alpha (\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) + t_0 u_0 \sin \alpha \cos^2 \alpha (2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) +$$
$$+ t_0 v_0 \sin^2\alpha\cos\alpha (7\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) + t_0 v'_0 \sin^3 \alpha (8 \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) +$$
$$+ 3 t_0 u'_0 \sin^4\alpha \cos\alpha \Big\}.$$

De même, le premier terme de la formule trouvée pour la différence de longueur,

$$\sigma' - \sigma = \frac{1}{90} r^2 s^2 x^5 + \frac{1}{144} rs (rv + 2su) x^6 + \text{etc.},$$

correspond à la formule

$$s - \sigma = \frac{\sigma^5}{90}(r_0 - t_0)^2 (r_0 \cos^2\beta + t_0 \sin^2\beta)^2 \cdot \cos^2\beta \sin^2\beta + \text{etc.}$$

donnée par M. Weingarten (Baeyer, *Messen*, etc. p. 92). Quant à la remarque faite à cette occasion, que, si la différence en question était développée davantage, les termes suivants con-

tiendraient aussi le facteur $(r_0 - t_0)^2$, on reconnaît qu'elle n'est pas fondée. S'il en était ainsi, en effet, ces termes devraient avoir, dans la notation maintenant employée, le facteur s^2: or, le premier terme nouveau ne contient s qu'à la première puissance, et le terme suivant, pour lequel nous avons trouvé ci-dessus en général $\frac{1}{14}(9\,B^2 + 16\,AC)\,x^7$, ne contient plus du tout ce facteur, puisque ce terme ne disparaît pas pour $s = 0$ ou $A = 0$ et $B = -\frac{1}{24}rv$. Bien que pour la sphère, d'après M. Weingarten, la différence des courbures principales r_0 et t_0 s'annule en même temps que la différence de longueur $s - \sigma$, la première de ces circonstances, qui se produit aussi aux ombilics d'une surface quelconque, ne suffit pourtant pas par elle-même pour en conclure la seconde: en effet, tandis que chez la sphère il existe, en outre, entre les coefficients différentiels supérieurs u_0, v_0, v'_0, u'_0 etc., d'autres relations particulières qui peuvent expliquer la disparition des termes supérieurs de $s - \sigma$, cela n'a pas lieu nécessairement chez une surface quelconque, et il arrivera seulement, en général, que pour $r_0 = t_0$ la différence $s - \sigma$ montera du 5e au 7e ordre. Une remarque analogue s'applique aux angles $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$; ils s'élèvent, dans le cas en question, du 2e au 3e ordre.

En ce qui concerne les premiers termes des expressions de $\gamma - \gamma'$, $\gamma'' - \gamma$ et $\sigma' - \sigma$, les formules données par M. Weingarten font connaître, à la vérité, ces grandeurs plus directement comme des fonctions des courbures principales r_0 et t_0 de la surface, et de l'angle α (ou par approximation β) compris entre la ligne géodésique et la section principale qui correspond à r_0; mais, par contre, dans les formules auxquelles nous avons été conduits, la signification du facteur r ressort plus immédiatement comme courbure de la section normale tangente à la ligne géodésique, c'est-à-dire comme courbure de la ligne géodésique elle-même; et, d'autre part, une signification simple peut aussi être attachée au facteur s, à l'aide de l'angle (aigu) γ, ci-dessus introduit, que la ligne géodésique fait avec sa tangente conjuguée.

L'indicatrice de la surface est, en effet, $rx^2 + 2sxy + ty^2 = C$; celui de ses diamètres qui est conjugué de la tangente $y = 0$ de la ligne géodésique est par conséquent $rx.X + sx.Y = 0$, d'où $\mp tg\,\gamma = \frac{Y}{X} = -\frac{r}{s}$ ou $s = \pm r \cot\gamma$. Il résulte encore de là, en interrompant les formules (2) et (3) au premier terme: $\mp(\gamma - \gamma') = -\frac{1}{6} rsx^2 = \mp \frac{1}{6} r^2 x^2 \cot\gamma$ et $\pm(\gamma'' - \gamma) = \pm\frac{1}{3} r^2 x^2 \cot\gamma$, ce qui cadre de nouveau avec les formules, déduites ci-dessus de la considération du cône ou du cylindre, $\gamma - \gamma' = \frac{1}{6}\omega^2 \cot\gamma$ et $\gamma'' - \gamma = \frac{1}{3}\omega^2 \cot\gamma$, attendu que l'angle ω des tangentes aux extrémités de la ligne géodésique est égal au quotient de la longueur σ ou x de cette ligne par son rayon de courbure, c'est-à-dire égal au produit rx.

Pour ce qui regarde maintenant le rapport des angles que la ligne géodésique fait avec les deux sections normales, il suit de (2) et (3):

$$\frac{\gamma'' - \gamma}{\gamma - \gamma'} = \frac{8\,rs + (5\,rv + 2\,su)\,x + \text{etc.}}{4\,rs + (\ rv + 2\,su)\,x + \text{etc.}}.$$

Si l'on suppose x infiniment petit, ce rapport devient égal à 2. Pour des valeurs finies, mais petites, de x, il est approximativement égal à 2, du moins tant que r ou s ne sont pas trop petits. Si au contraire s, par exemple, est du même ordre que x, soit $s = kx$, alors $\mp(\gamma - \gamma') = -\frac{1}{24} r(4k + v)x^3 + \text{etc.}$ et $\pm(\gamma'' - \gamma) = \frac{1}{24} r(8k + 5v)x^3 + \text{etc.}$ deviennent du 3e ordre, et $\frac{\gamma'' - \gamma}{\gamma - \gamma'} = \frac{8k + 5v}{4k + v}$ devient dépendant de k; par exemple, pour $k = -\frac{1}{2}v$ ou $s = -\frac{1}{2}vx$, on trouve $\mp(\gamma - \gamma') = \pm(\gamma'' - \gamma) = \frac{1}{24} rvx^3 + \text{etc.}$ ou $\gamma' = \gamma''$: c'est le cas considéré au début, en 2°, dans lequel les deux sections normales, ayant la même inter-

section avec le plan XY, coïncident, ou dans lequel les normales en P et en P_1 se coupent, ou du moins ont une distance d'un ordre plus élevé que dans le cas général; pour $k = 0$ ou $s = 0$, ce qui revient, comme on l'avait supposé en 3°, à dire que l'axe des X ou la tangente à la ligne géodésique est en même temps tangente à l'une des deux lignes de courbure, on a $\frac{\gamma'' - \gamma}{\gamma - \gamma'} = 5$; pour $k = -v$ ou $s = -vx$, on a $\frac{\gamma'' - \gamma}{\gamma - \gamma'} = 1$ ou $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma'')$, de sorte qu'alors la ligne géodésique partage en deux parties égales l'angle des deux sections normales; etc. Si l'on suppose que ce ne soit pas s, mais r qui reste petit, par exemple $r = k'x$, alors $\mp(\gamma - \gamma') = -\frac{1}{12} s (2k' + u) x^3 +$ etc. et $\pm(\gamma'' - \gamma) = \frac{1}{12} s (4k' + u) x^3 +$ etc. deviennent encore du 3e ordre, tandis que le rapport $\frac{\gamma'' - \gamma}{\gamma - \gamma'} = \frac{4k' + u}{2k' + u}$ devient dépendant de k'; par exemple, pour $k' = -\frac{1}{3} u$ ou $r = -\frac{1}{3} u x$, on trouve de nouveau $\gamma' = \gamma''$, c'est-à-dire, une section normale commune; pour $k' = 0$ ou $r = 0$, c'est-à-dire lorsque la ligne géodésique est tangente à l'une des deux lignes asymptotiques de la surface, on a $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma'')$; etc.

Dans les cas dont il vient d'être parlé, où soit s soit r a une petite valeur, c'est-à-dire où l'arc considéré de la ligne géodésique est du même ordre que la partie comprise entre les points pour lesquels les normales à la surface se coupent, ce ne sont pas seulement les formules relatives aux angles $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$ et à leur rapport, qui, comme on vient de le voir, prennent d'autres formes, dépendantes des coefficients k ou k'; mais aussi celles qui ont été établies ci-dessus, d'une manière générale, pour la différence en longueur et pour la flèche de la ligne géodésique et de la section normale.

Après avoir examiné la question au point de vue d'une surface quelconque, faisons maintenant l'application des résultats trouvés à une surface de révolution, et supposons que celle-ci soit donnée, par rapport à l'axe de révolution OZ (fig. 6) et au plan méridien XOZ qui passe par le point P, au moyen d'une équation de la forme $\rho^2 = x^2 + y^2 = F(z)$. Il faut commencer alors par chercher l'équation relativement à la tangente et à la normale au méridien en P, prises pour axes des X′ et des Z′, et à la tangente au parallèle en ce point, prise pour axe des Y′, lesquels axes des coordonnées sont les mêmes que ceux employés en général par M. Weingarten. Pour opérer cette transformation, on a, $(\rho_1, 0, z_1)$ étant le point P et φ l'angle d'inclinaison de la normale, les formules

$$x = \rho_1 - x' \sin\varphi - z \cos\varphi,\ y = y',\ z = z_1 + x' \cos\varphi - z' \sin\varphi,$$

dont la substitution donne pour la nouvelle équation, — si l'on développe le second membre suivant la série de Taylor, si l'on néglige comme étant du 4e ordre tous les termes en z'^2 et le terme en $x'^2 z'$, et si en outre les relations $\rho_1{}^2 = F(z_1)$ et $tg\varphi = -\frac{d\rho_1}{dz_1} = -\frac{F'(z_1)}{2\rho_1}$ ou $2\rho_1 = -F' \cot\varphi$ sont prises en considération, —

$$F' \cot\varphi\,(x' \sin\varphi + z' \cos\varphi) + (x'^2 \sin^2\varphi + 2x'z' \sin\varphi\cos\varphi) + y'^2 =$$
$$= F'(x'\cos\varphi - z'\sin\varphi) + \frac{1}{2}F''(x'^2\cos^2\varphi - 2x'z'\sin\varphi\cos\varphi) + \frac{1}{6}F'''x'^3\cos^3\varphi$$

ou

$$\left\{\frac{F'}{\sin\varphi} + (F'' + 2)x'\sin\varphi\cos\varphi\right\}z' = \frac{1}{2}\left\{(F''+2)\cos^2\varphi - 2\right\}x'^2 - y'^2 + \frac{1}{6}F'''x'^3\cos^3\varphi.$$

En résolvant cette équation relativement à z', au moyen de la multiplication par $\frac{\sin\varphi}{F'}\left\{1 - \frac{(F'' + 2)\,x'\,\sin^2\varphi\cos\varphi}{F'}\right\}$, on a donc, dans le cas d'une surface de révolution, pour les coefficients de l'équation déjà représentée ci-dessus, à l'exemple de M. Weingarten, par

$$z' = \frac{1}{2}(r_0 x'^2 + t_0 y'^2) + \frac{1}{6}(u_0 x'^3 + 3v_0 x'^2 y' + 3v'_0 x' y'^2 + u'_0 y'^3) + \text{etc.},$$

les valeurs suivantes:

$$r_0 = \frac{\sin\varphi}{F'}\left\{(F''+2)\cos^2\varphi - 2\right\}, \qquad t_0 = -\frac{2\sin\varphi}{F'},$$

$$u_0 = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{F'}\left[F'''\cos^2\varphi - \frac{3(F''+2)\sin^2\varphi}{F'}\left\{(F''+2)\cos^2\varphi - 2\right\}\right], v_0 = 0,$$

$$v'_0 = \frac{2(F''+2)\sin^3\varphi\cos\varphi}{F'^2}, \qquad u'_0 = 0.$$

Ces mêmes valeurs peuvent aussi être déduites d'autres formules, qui en outre conviennent mieux au calcul dans les cas où l'abscisse ϱ du méridien est donnée en fonction de l'angle d'inclinaison φ, ou se laisse facilement exprimer en cet angle au moyen de $\varrho^2 = F(z)$ et de $tg\,\varphi = -\frac{d\varrho}{dz}$. D'abord, en effet, r_0 et t_0 ne sont autre chose que les courbures principales de la surface de révolution en P, c'est-à-dire les valeurs inverses du rayon de courbure R_1 du méridien, et de la normale R_2 prise jusqu'à l'axe de révolution; de sorte qu'on a: $r_0 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{dx'} = -\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{d\varrho}$ et $t_0 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos\varphi}{\varrho}$, d'où il suit encore: $r_0\, d\varrho = d(t_0\, \varrho)$ ou $r_0 - t_0 = \frac{\varrho\, dt_0}{d\varrho}$. D'autre part, on a: $u_0 = \frac{dr_0}{dx'} = r_0\frac{dr_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d(r_0^2)}{d\varphi}$ et $v'_0 = \frac{dt_0}{dx'} = r_0\frac{dt_0}{d\varphi}$ ou encore $= -\frac{\sin\varphi\, dt_0}{d\varrho} = -\frac{(r_0 - t_0)\sin\varphi}{\varrho} = -(r_0 - t_0)t_0\, tg\,\varphi$. En outre, v_0 et u'_0, comme coefficients différentiels partiels de r_0 et de t_0 par rapport à y, doivent dans le cas présent être égaux à zéro, parce que les courbures principales r_0 et t_0 restent constantes lors du passage de P au point immédiatement suivant du parallèle. Si l'on voulait maintenant faire usage de ces valeurs pour retrouver d'abord les valeurs ci-dessus de r_0 et t_0, et par suite celles de u_0 et v_0', l'opération reviendrait essentiellement à substituer $2\varrho = -F'\cot\varphi$ et $d\varrho = -tg\,\varphi.\,dz$, ou $-F'\cot\varphi\, dz + F'\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -2\,tg\,\varphi\, dz$, c'est-à-dire, $F'\cos\varphi\, d\varphi =$ $= \sin\varphi\left\{(F''+2)\cos^2\varphi - 2\right\}dz$.

Pour remplacer ensuite dans le plan X′Y′ les axes des coordonnées par la tangente PX à la ligne géodésique et par sa perpendiculaire PY, on a besoin des formules déjà employées précédemment, $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ et $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$, à l'aide desquelles on calculera, — en négligeant les termes en y^2 et en y^3, qui sont sans influence sur les coefficients r, s, u, v, seuls nécessaires, — les valeurs de x'^2, y'^2, x'^3 et $x'y'^2$, qu'on substituera dans l'équation trouvée pour la surface de révolution. De cette manière, ou bien en substituant $v_0 = 0$ et $u'_0 = 0$ dans les formules (4) trouvées ci-dessus pour le cas général, on obtient:

$$r = r_0 \cos^2 \alpha + t_0 \sin^2 \alpha, \qquad s = -(r_0 - t_0) \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$u = \cos \alpha \,(u_0 \cos^2 \alpha + 3 v'_0 \sin^2 \alpha),$$
$$v = \sin \alpha \left\{ -u_0 \cos^2 \alpha + v'_0 (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right\},$$

ou bien:

$$r = \frac{\sin\varphi}{F'} \left\{ (F''+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\}, \quad s = -\frac{\sin\varphi}{F'} (F''+2)\cos^2\varphi\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$u = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha}{F'} \left[F''' \cos^2\varphi\cos^2\alpha - \frac{3\,(F''+2)\sin^2\varphi}{F'} \left\{ (F''+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\} \right],$$

$$v = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha}{F'} \left[F''' \cos^2\varphi\cos^2\alpha - \frac{(F'+2)\sin^2\varphi}{F'} \left\{ 3\,(F''+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\} \right],$$

d'où l'on déduit encore:

$$A = -\frac{1}{6} rs = \frac{1}{6} \frac{\sin^2\varphi}{F'^2} (F'+2)\cos^2\varphi\sin\alpha\cos\alpha \left\{ (F''+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\}$$

et

$$B = -\frac{1}{24} (rv + 2su) = \frac{1}{24} \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\alpha}{F'^2} \left[F''' \cos^2\varphi\cos^2\alpha \left\{ 3(F'+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\} - \frac{(F'+2)\sin^2\varphi}{F'} \left\{ (F''+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\} \left\{ 9(F''+2)\cos^2\varphi\cos^2\alpha - 2 \right\} \right].$$

Quant au rapport des angles $\gamma - \gamma'$ et $\gamma'' - \gamma$ que la ligne géodésique de la surface de révolution fait avec les deux sections normales, il y a lieu de considérer de nouveau les divers cas dont nous nous sommes occupés ci-dessus à propos d'une surface quelconque. Nous avons alors trouvé, entre autres, que pour $s = -\frac{1}{2} v x$ les deux sections normales coïncident. Si ce cas se présente sur la surface de révolution (toujours dans l'hypothèse d'une distance x petite), l'angle α ne différera évidemment que peu de 90°: on peut poser alors, par exemple, $\alpha = 90° - k\frac{x}{R_2} = 90° - kt_0 x$, et par suite approximativement $\sin\alpha = 1$ et $\cos\alpha = kt_0 x$, de sorte qu'on a dans ce cas:

$$s = -(r_0 - t_0)\sin\alpha\cos\alpha = -(r_0 - t_0)\, k t_0\, x \text{ et}$$
$$v = \sin\alpha \{ -u_0 \cos^2\alpha + v'_0 (2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \} = -v'_0 = (r_0 - t_0) t_0 \, tg\,\varphi.$$

Ces valeurs, substituées dans la condition $s = -\frac{1}{2} v x$, donnent $k = \frac{1}{2} tg\,\varphi$, et par conséquent $\alpha = 90° - \frac{x}{2R_2} tg\,\varphi$. Que c'est là réellement l'azimut pour lequel les deux sections normales coïncident, c'est-à-dire pour lequel les points P et P_1 sont situés sur un même parallèle, on peut aussi le reconnaître directement en construisant, non plus cette fois le long de la ligne géodésique ou de la section normale commune, mais le long du parallèle lui-même, le cône de révolution enveloppe. Les angles compris entre la ligne géodésique et le parallèle, sur la surface de révolution et sur le cône, sont alors sensiblement égaux entre eux et, comme le montre le développement du cône, égaux aussi au demi-angle des génératrices de celui-ci en P et en P_1, c'est-à-dire égaux au quotient $\frac{x}{2R_2} tg\,\varphi$ de $\frac{1}{2} PP_1$ ou de $\frac{x}{2}$ par la longueur $R_2 \cot\varphi$ de ces génératrices. Ce résultat comprend en outre, comme cas particulier, la formule $\gamma = 90° - k\varepsilon = 90° - \frac{1}{2}\varepsilon \sin\beta$, déjà

trouvée ci-dessus dans le cas du cône de révolution, pour lequel on a: angle $PTP_1 = \varepsilon \sin \beta$.

Dans le cas de la section normale commune, cas auquel nous avons affaire en ce moment, nous avons trouvé d'une manière générale, pour l'angle formé par cette section avec la ligne géodésique, $\mp(\gamma - \gamma') = \pm(\gamma'' - \gamma) = \frac{1}{24} r v x^3 + \text{etc.}$; à cause de $r = r_0 \cos^2 \alpha + t_0 \sin^2 \alpha = t_0$ et de $v = - v'_0 = (r_0 - t_0) t_0 tg \varphi$, cet angle devient donc ici: $-\frac{1}{24} t_0 v'_0 x^3$ ou $\frac{1}{24}(r_0 - t_0) t_0^2 x^3 tg \varphi$. De cet angle se laissent déduire immédiatement, ainsi qu'on l'a montré au début, en 2°, la différence de longueur et la flèche des deux courbes: à l'angle $\frac{y_1}{x_1} = - B x_1{}^3$ correspondait alors la différence $\sigma' - \sigma = \frac{17}{70} B^2 x_1{}^7$ et la flèche $\delta = -\frac{5}{16} B x_1{}^4$; on a donc maintenant, à raison de $B = \frac{1}{24} t_0 v'_0$, pour la différence de longueur: $\sigma' - \sigma = \frac{17}{70 \times 24^2} t_0^2 v'^2_0 x^7$, et pour la flèche: $\delta = -\frac{5}{384} t_0 v'_0 x^4$.

Les relations que nous venons d'employer entre l'angle, la différence de longueur et la flèche ont été trouvées par un calcul où l'une des extrémités, le point d'inflexion P, était prise pour origine des coordonnées, tandis que l'autre extrémité était également devenue un point d'inflexion. Au lieu d'opérer ainsi, on pourrait dans le cas présent, où, tant sur la surface de révolution elle-même que sur la surface développable qui l'enveloppe suivant la ligne géodésique PP_1, le plan méridien mené à égale distance de P et de P_1 est un plan de symétrie, — symétrie qui existerait d'ailleurs aussi, à des différences d'ordre supérieur près, pour une surface quelconque, tant qu'on resterait entre les extrémités rapprochées P et P_1 d'une section normale commune, — on pourrait, dis-je, exécuter le calcul d'une manière plus régulière,

en prenant pour axes des coordonnées la tangente et la normale au milieu de la section normale développée. Sur ces axes, la courbe serait $y = A' x^2 + B' x^4 +$ etc.; donc, attendu que pour les points extrêmes ou points d'inflexion $(\pm x_1, y_1)$ la condition $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} = 2 A' + 12 B' x_1{}^2 = 0$ donne $A' = - 6 B' x_1{}^2$, on trouve $y = - 6 B' x_1{}^2 x^2 + B' x^4$. On déduit de là, maintenant que la ligne géodésique développée ou la corde PP_1 est parallèle à l'axe des abscisses, pour $x = x_1$, la flèche $\delta = y_1 = - 5 B' x^4{}_1$ et l'angle $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = - 12 B' x_1{}^2 . x_1 + 4 B' x_1{}^3 = - 8 B' x_1{}^3$, valeurs qui, attendu que l'abscisse x_1 est ici la moitié de celle qu'on avait employée précédemment, concordent avec les valeurs antérieures en supposant les coefficients B et B' égaux. Quant à la différence de longueur, on a:

$$\sigma' - \sigma = 2 \int_0^{x_1} dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} - 2 x_1 =$$

$$= 2 \int_0^{x_1} dx \sqrt{\left\{1 + 16 B'^2 \left(- 3 x_1{}^2 x + x^3\right)^2\right\}} - 2 x_1 =$$

$$= 2 \int_0^{x_1} 8 B'^2 \left(9 x_1{}^4 x^2 - 6 x_1{}^2 x^4 + x^6\right) dx =$$

$$= 16 B'^2 \left(3 x_1{}^7 - \frac{6}{5} x_1{}^7 + \frac{1}{7} x_1{}^7\right) = \frac{16 \times 68}{35} B'^2 x_1{}^7 = \frac{17}{70} B'^2 (2 x_1)^7,$$

ce qui est également conforme à la formule antérieure.

Nous allons enfin prendre encore une couple d'exemples simples de surfaces de révolution, lesquels du reste, si l'on n'avait pas voulu développer d'abord les formules générales relatives à ces surfaces, pourraient être traités, chacun séparément, d'une manière plus concise. Soit d'abord le cône de révolution. Dans ce cas, l'angle d'inclinaison φ est constant et égal au demi-angle au sommet β, donc $r_0 = - \frac{\sin \varphi \, d \varphi}{d \varrho} = 0$ et, en désignant de nou-

veau par l la génératrice prise jusqu'au sommet, $t_0 = \frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{\cot\beta}{l}$; on a, en outre, $u_0 = \frac{dr_0}{dx} = 0$, $v'_0 = -(r_0 - t_0)t_0 tg\,\varphi = \frac{\cot\beta}{l^2}$,

$$A = -\frac{1}{6} rs = -\frac{1}{6}(t_0 \sin^2\alpha)(t_0 \sin\alpha\cos\alpha) = -\frac{1}{6}\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha\cot^2\beta}{l^2} \text{ et}$$

$$B = -\frac{1}{24}(rv + 2su) = -\frac{1}{24} t_0 v'_0 \sin^3\alpha \left\{(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 6\cos^2\alpha\right\} =$$

$$= -\frac{1}{24}\frac{\sin^3\alpha(8\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cot^2\beta}{l^3}.$$

D'après la formule (2), on a par conséquent:

$$-(\gamma - \gamma') = -\frac{1}{6}\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha\cot^2\beta}{l^2}x^2 - \frac{1}{24}\frac{\sin^3\alpha(8\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cot^2\beta}{l^3}x^3.$$

En remplaçant ici, conformément à la notation antérieure, α par γ, et en substituant, comme il résulte du développement du cône,

$$\frac{x}{l} = \frac{\sin(\varepsilon\sin\beta)}{\sin(\gamma + \varepsilon\sin\beta)} = \frac{\varepsilon\sin\beta}{\sin\gamma + \varepsilon\cos\gamma\sin\beta} = \frac{\varepsilon\sin\beta}{\sin\gamma}\left(1 - \frac{\varepsilon\cos\gamma\sin\beta}{\sin\gamma}\right),$$

on retombe sur la valeur, déjà obtenue par le calcul appliqué directement au cône:

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{6}\varepsilon^2\sin\gamma\cos\gamma\cos^2\beta - \frac{1}{24}\varepsilon^3\sin^2\gamma\sin\beta\cos^2\beta.$$

De la même manière, on retrouverait la valeur obtenue pour l'angle $\gamma'' - \gamma$.

Comme second exemple, nous choisirons l'ellipsoïde de révolution $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-e^2} = a^2$. En partant, dans ce cas, de l'abscisse, facile à exprimer en fonction de l'angle d'inclinaison φ,

$$\varrho = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{(1 - e^2\sin^2\varphi)}},$$

on a:

$$r_0 = \frac{1}{R_1} = -\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{d\varrho} = \frac{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)},$$

$$t_0 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{\sqrt{(1 - e^2\sin^2\varphi)}}{a},$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\frac{d(r_0{}^2)}{d\varphi} = -\frac{3e^2(1-e^2\sin^2\varphi)^2\sin\varphi\cos\varphi}{a^2(1-e^2)^2},$$

$$v'_0 = r_0\frac{dt_0}{d\varphi} = -\frac{e^2(1-e^2\sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2(1-e^2)},$$

d'où il suit:

$$r = \frac{(1-e^2+e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha)\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}{a(1-e^2)},$$

(ce qui est dûment la courbure de la ligne géodésique ou $\frac{1}{R}$ de M. Jordan, *Taschenbuch*, p. 260, formule (5)),

$$s = -\frac{e^2\cos^2\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}{a(1-e^2)},$$

$$u = -\frac{3e^2(1-e^2\sin^2\varphi)(1-e^2+e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha}{a^2(1-e^2)^2},$$

$$v = \frac{e^2(1-e^2\sin^2\varphi)(1-e^2+3e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha}{a^2(1-e^2)^2},$$

et par conséquent:

$$A = -\frac{1}{6}rs = \frac{1}{6}\frac{e^2(1-e^2\sin^2\varphi)(1-e^2+e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha)\cos^2\varphi\sin\alpha\cos\alpha}{a^2(1-e^2)^2}$$

et

$$B = -\frac{1}{24}(rv+2su) = -\frac{1}{24}\frac{e^2(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}(1-e^2+e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha)}{a^3}\cdot$$

$$\frac{(1-e^2+9e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha}{(1-e^2)^3}.$$

Par là sont donc connus l'angle $\mp(\gamma-\gamma') = \frac{y}{x} = Ax^2 + Bx^3$, la différence de longueur $\sigma'-\sigma = \frac{2}{5}A^2x^5 + ABx^6$ et la flèche $\delta = 0{,}385\,Ax^3 + 0{,}466\,Bx^4$.

Dans ces formules sont impliquées, en particulier, celles qui conviennent au sphéroïde terrestre, et qu'on aurait aussi pu

établir directement en supposant d'emblée e^2 petit. Dans cette supposition, on a approximativement:

$$A = \frac{1}{6} \frac{e^2 \cos^2\varphi \sin\alpha \cos\alpha}{a^2} \text{ et } B = -\frac{1}{24} \frac{e^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\alpha}{a^3},$$

par conséquent, d'une part:

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{6} e^2 \frac{x^2}{a^2} \cos^2\varphi \sin\alpha \cos\alpha - \frac{1}{24} e^2 \frac{x^3}{a^3} \sin\varphi \cos\varphi \sin\alpha,$$

c'est-à-dire, sauf remplacement de la latitude géographique φ par la latitude réduite u, liée à la première par la relation $tg\, u = \sqrt{(1-e^2)}\, tg\, \varphi$, la formule de Bessel, telle qu'elle a été transformée par M. Baeyer; d'autre part:

$$\sigma' - \sigma = \frac{1}{90} e^4 \frac{x^5}{a^4} \cos^4\varphi \sin^2\alpha \cos^2\alpha - \frac{1}{144} e^4 \frac{x^6}{a^5} \sin\varphi \cos^3\varphi \sin^2\alpha \cos\alpha,$$

c'est-à-dire, la formule de Bessel, avec *un* degré d'approximation de plus; enfin, en troisième lieu, on peut aussi substituer les valeurs précédentes de A et B dans la formule de la flèche δ.

Lorsque les points P et P_1 sont situés sur un même parallèle, cette dernière formule doit être remplacée, ainsi que nous l'avons déjà vu, par:

$$\delta = -\frac{5}{384} t_0 v'_0 x^4 = \frac{5}{384} \frac{e^2 (1-e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi \cos\varphi}{a^3 (1-e^2)} x^4$$

ou, pour le sphéroïde terrestre, approximativement par:

$$\delta = \frac{5}{384} e^2 \frac{x^4}{a^3} \sin\varphi \cos\varphi.$$

Cette formule, qui, si on l'exprime en parties du rayon a et qu'on pose $x = 2y$, prend la forme $\frac{\delta}{a} = \frac{5}{48} e^2 \frac{y^4}{a^4} \sin 2\varphi$, vient donc en remplacement de celle de M. Helmert, à laquelle nous avons fait allusion dans notre introduction, à savoir (en secondes) $206265 \frac{e^2}{4} \frac{y^2}{R^2} \sin 2\varphi$; cette dernière indique bien une correction à introduire dans la latitude géographique lors du passage de

l'hypothèse sphérique à l'hypothèse sphéroïdale, mais une correction qui ne tient pas encore compte, sur le sphéroïde, de la différence entre la ligne géodésique et la section normale commune. La formule que nous venons de trouver est aussi comprise, comme cas particulier, dans la dernière formule de la page 361 du Mémoire de M. Clarke, où il n'y a qu'à remplacer δu ou $\frac{QP}{a}$ par $\frac{\delta}{a}$, σ et σ_1 par $\frac{x}{2a}$ et u par φ. A la page 362 de ce Mémoire, se trouve encore la remarque que cette flèche δ est égale aux $\frac{5}{6}$ de la distance entre le milieu S″ de la section normale commune PP_1 et le milieu S′ de la section passant par la corde PP_1 et par la normale en son milieu Q. Si R désigne le milieu de l'arc de parallèle PP_1, on se rend facilement compte, pour une surface de révolution quelconque, du calcul approximatif suivant:

$$S''S' = QS''.S''QS' = QR\cos\varphi\left(\frac{RS}{R_1} - \frac{RS''}{R_2}\right) = QR\cos\varphi.QR\sin\varphi.(r_0 - t_0) =$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{2\varrho}\right)^2 \sin\varphi\cos\varphi.(r_0 - t_0) = \frac{1}{64}x^4\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho}\right)^2 tg\varphi(r_0 - t_0) =$$

$$= -\frac{1}{64}t_0 v'_0 x^4 = \frac{6}{5}\delta,$$ qui montre que la remarque de M. Clarke s'applique aussi à ces surfaces en général.

Ainsi que l'a fait observer M. Bremiker dans ses *Studien* ci-dessus cités, au lieu de faire usage dans les calculs relatifs au sphéroïde terrestre de la ligne géodésique ou d'une des deux sections normales, on pourrait aussi prendre d'autres lignes, plus ou moins liées aux premières, entre deux points rapprochés P et P_1. Sans entrer ici dans une étude plus détaillée au sujet de pareilles lignes, soit sur une surface quelconque, soit sur le sphéroïde terrestre, je choisirai un exemple simple, celui du cylindre, pour

donner une idée de la position qu'elles peuvent occuper les unes par rapport aux autres. Voici le tableau des équations complètes et des équations approchées jusqu'au 3e ordre, en coordonnées cylindriques, de différentes lignes qui sous ce rapport ont quelque titre à être prises en considération; dans ces équations, les constantes r, γ et ε conservent la signification qui leur a été attribuée antérieurement (fig. 2), et on a posé $r \cot \gamma = h$, tandis que les variables ψ et z désignent l'angle du plan méridien, mesuré à partir du plan initial PQQ_1, et la hauteur d'un point quelconque de la courbe, mesurée à partir de la base PQR.

1°. La ligne géodésique, $z = h\,\psi$.

2°. La section normale en P, $z = h \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} \sin\psi = h\psi \left\{ 1 + \frac{1}{6}(\varepsilon^2 - \psi^2) \right\}$.

2'°. La section normale en P_1, $z = h \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} \left\{ \sin\varepsilon - \sin(\varepsilon - \psi) \right\} =$

$$= h \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} \cdot 2 \sin \frac{1}{2}\psi \cos\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\psi\right) = h\,\psi \left\{ 1 - \frac{1}{6}(\varepsilon - \psi)(2\varepsilon - \psi) \right\}.$$

3°. La projection de la corde PP_1 sur le cylindre,

$$z = h \frac{\varepsilon \sin\psi}{2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \psi\right)} = h\,\psi \left\{ 1 + \frac{1}{6}(\varepsilon - \psi)(\varepsilon - 2\psi) \right\}.$$

4°. Le lieu géométrique des points de contact de celles des tangentes au cylindre qui coupent les normales de P et de P_1,

$$z = h \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} \sin\psi \cos(\varepsilon - \psi) = h\,\psi \left\{ 1 - \frac{1}{3}(\varepsilon - \psi)(\varepsilon - 2\psi) \right\}.$$

5°. La section qui passe par la normale élevée au milieu de PP_1, $z = h \frac{\varepsilon}{2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon} \left\{ \sin \frac{1}{2}\varepsilon - \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \psi\right) \right\} =$

$$= h \frac{\varepsilon}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon} \sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \psi) = h\,\psi \left\{ 1 - \frac{1}{12}(\varepsilon - \psi)(\varepsilon - 2\psi) \right\}.$$

6°. La courbe pour laquelle le plan normal tangent passe toujours par P, $\frac{dz}{r\,d\psi} = \frac{z}{r \sin\psi}$, d'où $z = h \frac{\varepsilon}{tg \frac{1}{2}\varepsilon} tg \frac{1}{2}\psi =$

$$= h\,\psi \left\{ 1 - \frac{1}{12}(\varepsilon^2 - \psi^2) \right\}.$$

6'°. La courbe pour laquelle le plan normal tangent passe toujours par P_1, $\frac{dz}{rd\psi} = \frac{h\varepsilon - z}{r\sin(\varepsilon - \psi)}$, d'où $z = h\frac{\varepsilon}{tg\frac{1}{2}\varepsilon}\left\{tg\frac{1}{2}\varepsilon - tg\frac{1}{2}(\varepsilon - \psi)\right\} =$
$= h\frac{\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \psi)} = h\psi\left\{1 + \frac{1}{12}(\varepsilon - \psi)(2\varepsilon - \psi)\right\}$; etc.

Pour une surface quelconque il y aurait encore lieu de considérer les deux courbes qui coupent respectivement sous des angles constants les lignes de courbure de la surface elle-même ou celles de la surface développable enveloppe menée par la ligne géodésique, courbes qui sur le cylindre se confondent avec cette ligne elle-même. Pour une surface à centre, on pourrait prendre en outre la section par le plan qui passe par ce point.

La courbe n° 3 est la même que celle indiquée par M. Bremiker (page 2) pour une surface quelconque, sous le nom de *Feldlinie.* Dans ce passage, toutefois, et surtout dans les définitions au bas de la page 62 et au haut de la page 64, il est admis abusivement (comme le remarque aussi M. B(runs) dans une annonce insérée au *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. II, 1869—1870, p. 836—838) qu'en chaque point de cette courbe le plan normal tangent passe par les deux points extrêmes P et P_1; au lieu de plan tangent normal, il faut lire: un *certain* plan normal (qui en général n'est pas tangent à la courbe). Aussi, quand on examine de près la signification des calculs basés sur ces définitions (p. 63—65), on reconnait qu'ils font seulement en apparence satisfaire la courbe à la condition énoncée en premier lieu. La seule définition exacte de la *Feldlinie* est celle qui est donnée au bas de la page 65. On peut très bien, au contraire, demander que le plan normal tangent passe toujours soit par P, soit par P_1: pour le cylindre, on obtient alors les courbes n°s 6 et 6'.

De même, la courbe n°. 4 est destinée à remplacer celle dont M. Bremiker parle à la page 4, et à laquelle il impose la condition impossible que partout la tangente à la courbe elle-même doit couper les normales de P et de P_1.

La courbe n° 5 est, non-seulement pour le cylindre, mais pour

une surface quelconque, la même que celle qui est déterminée par la condition que son plan fasse des angles égaux avec les normales aux deux points extrêmes, peu distants, P et P_1. Elle est en outre la courbe plane la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface entre ces deux points, ce dont on peut se convaincre par une démonstration géométrique, analogue à celle donnée par M. J. Bertrand (*Journal de Liouville*, t. XIII, 1848, p. 79) de la propriété fondamentale de la ligne géodésique, en remarquant: 1°. que, parmi tous les arcs de cercle qui peuvent être substitués à une quelconque des courbes planes PP_1, celui-là se rapproche le plus de cette courbe qui a pour rayon la moyenne des rayons de courbure en P et en P_1, c'est-à-dire, le rayon de courbure au milieu de PP_1; 2°. que, pour les différentes courbes planes PP_1, ces rayons de courbure, à des différences d'ordre supérieur près, sont liés entre eux suivant le théorème de Meusnier; 3°. que la courbe plane PP_1 la plus courte correspond au rayon de courbure le plus grand, c'est-à-dire à celui qui se place le long de la normale élevée au milieu de PP_1. La considération de l'ellipsoïde osculateur, pour ce point milieu, confirmerait aussi ce qui vient d'être dit.

Delft, Octobre 1875.

RECHERCHES

SUR

L'ORIGINE DU CARBONE DES PLANTES,

PAR

J. W. MOLL.

Pendant l'été de 1876 j'ai eu l'occasion de faire, au laboratoire de M. le professeur Sachs, à Würzburg, quelques recherches sur le sujet indiqué par le titre qui précède.

La description détaillée de mes expériences, avec les conclusions qui s'en déduisent, paraîtra bientôt, je l'espère, dans les *Landwirthschaftliche Jahrbücher*, *herausgegeben von* Nathusius *und* Thiel. Les travaux antérieurs, relatifs à la question traitée, seront alors aussi mentionnés avec tous les développements nécessaires. Ici je me bornerai à faire connaître brièvement les principaux résultats de mes recherches et à donner un aperçu des expériences qui m'ont conduit à ces résultats.

Il est bien connu que la plante verte tire son carbone de l'acide carbonique ambiant, qui, sous l'influence de la lumière, est décomposé dans les parties vertes, en particulier dans les feuilles. De l'oxygène est alors émis par la plante, tandis que le carbone est fixé dans ses organes.

Mais il s'agit de savoir où la plante puise l'acide carbonique

nécessaire à son développement. La quantité relativement faible de ce gaz, qui se trouve constamment dans l'atmosphère, est-elle absorbée directement par les feuilles et élaborée dans leurs tissus ?

Ou bien, les racines s'emparent-elles de l'acide carbonique contenu, parfois en proportions assez notables, dans le sol, et ce gaz monte-t-il à travers la tige jusque dans les feuilles, pour y être décomposé ?

Il est clair qu'une troisième source d'acide carbonique ne saurait exister pour les plantes terrestres; à priori, toutefois, il n'est nullement impossible que l'air et le sol fournissent tous les deux, de la manière indiquée, une partie de l'acide carbonique dont la plante a besoin.

Occupons-nous d'abord de la question de savoir si la plante prend directement de l'acide carbonique à l'atmosphère.

Par la voie expérimentale, cette question a été resolue affirmativement par divers observateurs. Il suffit de citer ici le nom de M. Boussingault, dont les expériences ont été répétées, avec le même succès, par M. Vogel et M. Wittwer, et postérieurement par M. Rauwenhoff. En même temps que ces derniers, M. Harting a fourni, par une autre voie, une nouvelle démonstration du phénomène en question.

En outre, plusieurs faits universellement connus prêtent un appui solide aux conclusions de ces naturalistes.

En premier lieu, il est certain que par la présence de la végétation le sol devient plus riche en carbone. Rappelons-nous seulement la couche superficielle, noire et riche en humus, de tout sol sablonneux qui, abandonné à lui-même, a été couvert quelque temps d'un tapis de mousses ou de bruyères. Nos dunes et nos landes en présentent les plus beaux exemples. Les plantes ont dû soustraire ce carbone à l'atmosphère, puisque le sol en était originellement dépourvu.

Une autre preuve est fournie par les cultures dites aquatiques. Une plante dont les racines plongent dans une eau limpide, ne tenant en dissolution qu'un petit nombre de sels (sans carbonates),

peut fixer dans ses tissus une quantité considérable de carbone, autant qu'une plante analogue, végétant sous les mêmes conditions, mais enracinée dans un sol riche en acide carbonique.

Aussi n'est-il douteux pour personne qu'une grande partie du carbone des plantes ne soit empruntée directement par les feuilles à l'atmosphère ambiante. L'air doit donc être considéré comme une abondante source de carbone pour le végétal. On peut affirmer que l'acide carbonique de l'atmosphère est, à lui seul, parfaitement suffisant pour faire atteindre à la plante son développement normal sous tous les rapports.

Mais cela n'exclut pas la possibilité que, par ses racines, la plante puise aussi de l'acide carbonique dans le sol et le décompose dans ses feuilles. Il est très naturel de supposer, notamment, que l'utilisation de l'acide carbonique du sol puisse donner lieu à la fixation d'une quantité de carbone plus grande que celle dont la plante s'empare lorsqu'elle tire son acide carbonique exclusivement de l'air. De cette manière, l'acide carbonique contenu dans le sol contribuerait à augmenter la production de matière solide et la vigueur de la végétation, de sorte que son abondance plus ou moins grande aurait en agriculture une importance réelle.

Si nous essayons, toutefois, d'apprécier la valeur de cette hypothèse au moyen des connaissances déjà acquises relativement à la vie végétale, une difficulté se présente tout d'abord. Plusieurs circonstances semblent indiquer, en effet, que les racines ne peuvent puiser que peu ou point d'acide carbonique dans le sol. Rappelons seulement que, par le fait de la respiration, les racines absorbent continuellement l'oxygène qui les entoure, et émettent de l'acide carbonique à la place. La racine contiendra donc toujours de l'acide carbonique, et cela peut-être en quantité telle que la diffusion de l'acide carbonique du sol dans la racine sera rendue impossible. Je fais cette observation pour montrer que l'absorption d'acide carbonique par les racines ne peut nullement être regardée comme une conséquence nécessaire de la présence de ce gaz dans les interstices du sol.

Néanmoins, cette absorption n'a rien d'impossible. Lorsque le sol est très riche en acide carbonique, il se pourrait qu'une partie de ce gaz pénétrât dans les racines, en dépit de la circonstance dont il vient d'être question.

Or, telles sont les conditions où se trouvent la plupart de nos plantes cultivées. M. Boussingault a constaté que dans une terre fertile l'air peut contenir jusqu'à 9 pour cent d'acide carbonique, c'est-à-dire environ 180 fois plus que l'atmosphère. Cela est dû surtout à la présence d'engrais organiques.

Il y avait donc des motifs pour présumer que, si la fumure par les matières riches en humus favorise la végétation, c'est en partie parce qu'elle fournit aux racines des plantes une abondante source d'acide carbonique.

Comme on pouvait s'y attendre, cette manière de voir n'a pas manqué de défenseurs parmi les savants. Je citerai, entre autres, Liebig et Unger. M. Boussingault, au contraire, pensait que la plante tire tout son carbone de l'atmosphère.

Jusqu'ici, toutefois, personne ne s'est occupé sérieusement de la solution expérimentale du problème en question, bien qu'il ait incontestablement une importance majeure pour la connaissance des phénomènes vitaux de la plante.

Ce qu'il fallait donc, avant tout, c'était d'établir quelques faits précis, qui pussent servir de point de départ pour des recherches plus complètes. J'ai essayé d'atteindre ce but, et je vais maintenant rendre compte des résultats auxquels je suis parvenu.

On reconnaît immédiatement que la première et la plus importante question qui doive être résolue est celle-ci: *Les feuilles peuvent-elles décomposer l'acide carbonique qui est fourni aux racines?*

Par cette voie seulement, on peut espérer arriver à un résultat certain; la question posée est celle qui doit provisoirement attirer toute notre attention, celle dont la solution est absolument indispensable à l'étude ultérieure du problème de l'acide carbonique.

Comme nous le verrons, la réponse a été de tous points négative.

On sait que M. Sachs a fait, il y a quelques années, l'importante découverte que la fécule des grains de chlorophylle doit être considérée comme le premier produit *visible* de la décomposition de l'acide carbonique. La connaissance de ce fait n'est pas seulement du plus haut intérêt pour toute la physiologie végétale, mais rendait aussi d'une exécution plus facile, sous beaucoup de rapports, la recherche que je m'étais proposée. Elle me fournissait en effet une méthode pouvant conduire à la solution de la question énoncée ci-dessus. Celle-ci se laissait maintenant traduire de cette manière: Les feuilles peuvent-elles *former de la fécule* aux dépens de l'acide carbonique dont disposent les racines?

Pour ne pas manquer le but auquel nous visons, nous devons avant tout nous représenter clairement les conditions naturelles dans lesquelles se trouvent les feuilles des plantes. Comme on le sait, l'atmosphère contient une certaine proportion d'acide carbonique (environ $^1/_{20}$ pour cent), qui offre cette particularité de rester toujours la même, entre des limites assez étroites. Sans vouloir toucher aux causes de ce phénomène, je pose donc en fait que l'air possède une teneur *constante* en acide carbonique.

Il s'ensuit immédiatement que les feuilles, chez qui nous voulons étudier la formation de la fécule, doivent être placées, sous le rapport dont il vient d'être parlé, dans les mêmes conditions.

Cette exigence peut être facilement satisfaite de deux manières différentes. D'abord, on peut observer les feuilles à l'air libre. En second lieu, on peut les maintenir dans un air incessamment dépouillé d'acide carbonique au moyen de la potasse en solution, et dans lequel par conséquent la proportion constante d'acide carbonique est égale à zéro. Mais il ne sera nullement permis de les placer dans un volume limité d'air sans contact avec la potasse. La proportion d'acide carbonique d'un pareil air serait exposée, par suite même de la présence de la feuille, à toutes sortes de variations.

Une première et très simple expérience se présente maintenant comme d'elle-même. Une feuille dépourvue de fécule, et unie à la plante enracinée, est introduite dans une enceinte remplie d'air et contenant aussi une solution de potasse, tandis que la racine se trouve en dehors de cette enceinte, dans une terre riche en humus (série I).

Il s'agit de savoir si la feuille, dans ces conditions, formera de la fécule sous l'influence de la lumière.

Les expériences exécutées de cette manière m'ont appris toutes, sans exception, qu'il n'y a pas production de fécule dans un air privé d'acide carbonique.

Il me parut alors utile d'étendre un peu le cercle de mes recherches, afin de donner aux résultats une signification plus générale. Je me proposai donc d'examiner si l'acide carbonique, qu'on fournit à l'un ou à l'autre organe d'une plante, soit à la racine, soit à la tige ou à une portion de feuille, peut servir à former de la fécule dans une feuille, ou partie de feuille, restée organiquement unie à l'organe dont il s'agit.

Ici encore, la question peut être élucidée par des expériences simples. Il suffit d'introduire, par exemple, le sommet d'une feuille dans un espace clos, où l'air soit maintenu constamment privé d'acide carbonique. On n'a alors qu'à faire séjourner la base de la même feuille, avec ou sans le pétiole et la tige, dans de l'air artificiellement chargé d'une forte proportion d'acide carbonique (environ 5 pour cent dans mes expériences). Si la feuille ne renfermait pas de fécule, la question à résoudre sera de nouveau celle-ci: Le sommet de la feuille peut-il former de la fécule, aux dépens de l'acide carbonique que la base et le pétiole ou la tige ont à leur disposition?

J'ai fait ainsi deux séries d'expériences, différant un peu quant à leur disposition (séries II et III). En accord avec les précédentes, elles ont toutes conduit à la conclusion que, dans un espace ne contenant pas d'acide carbonique, une feuille ou portion de feuille ne peut jamais produire de la fécule aux dépens de l'acide carbonique qui est fourni

en abondance à quelque autre partie de la même plante.

Mais cela ne me suffisait pas. Sans doute, il était prouvé par cette voie que, dans les conditions indiquées, la feuille ne peut donner naissance qu'à une quantité très petite, ou plutôt imperceptible, de fécule. Mais pourtant la possibilité existait qu'il s'en était formé des quantités excessivement faibles, qui ne se décelaient pas par une réaction simple, mais qui se laisseraient peut-être mettre en évidence d'une manière indirecte.

Lorsqu'une feuille dépourvue de fecule est exposée à l'air libre et à la lumière solaire, et qu'on y recherche à des intervalles successifs, sur de petits fragments, la présence de la fécule, on trouve au bout de quelque temps une petite quantité de cette matière, qui ensuite augmente peu à peu. Or il était possible que cette fécule se montrerait plus tôt dans le cas où une autre partie de la plante, unie organiquement à la feuille ou portion de feuille étudiée, séjournerait en outre dans un air beaucoup plus riche en acide carbonique qne l'atmosphère ordinaire.

Nous avons vu, il est vrai, que cet acide carbonique n'est pas en état de faire naître ailleurs une quantité de fécule appréciable par elle-même. Mais il pourrait néanmoins s'en former assez pour que, jointe à la fécule qui se forme dans l'air ordinaire, elle produisìt une réaction visible dans un temps plus court que cela n'a lieu dans les circonstances normales.

Cette hypothèse a été soumise de la manière suivante au contrôle de l'expérience (série IV). Une feuille détachée de la plante et dépourvue de fécule fut coupée suivant la nervure médiane. L'une des moitiés fut exposée tout entière à l'air libre et à la lumière solaire. L'autre moitié, à laquelle était resté attaché le pétiole, fut introduite par sa base dans une enceinte dont l'air contenait 5 pour cent d'acide carbonique. Le sommet de cette moitié de la feuille se trouvait, au contraire, également à l'air libre. Aprés des intervalles de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ heure, etc., on recherchait la fécule dans les sommets des deux moitiés.

Il s'agissait de savoir si jamais, dans le sommet de la demi-feuille dont la base plongeait dans l'air riche en acide carbonique,

la fécule apparaîtrait à un moment où l'autre moitié n'en montrerait encore aucune trace. La réponse fut de nouveau invariablement négative : dans les deux moitiés de la feuille la fécule apparut simultanément et augmenta aussi en quantité d'une manière tout à fait semblable.

L'acide carbonique fourni en abondance à une partie de la plante ne peut donc jamais accélérer la formation de la fécule dans une feuille ou portion de feuille voisine et exposée à l'air libre, pas plus qu'il ne peut, à lui seul, y faire apparaître la fécule.

Ce résultat me parut mériter d'être encore confirmé pour la racine en particulier.

A cet effet, je coupai une partie d'une feuille dépourvue de fécule. L'autre partie resta attachée à la plante, dont les racines occupaient une terre riche en humus. Comme précédemment, les deux parties furent exposées à la lumière, et de temps en temps on en détacha de petits fragments pour y rechercher l'existence de la fécule.

D'accord avec mes prévisions, la réaction ne se montra jamais, dans la portion de feuille en rapport avec la racine, avant que cela n'eût lieu aussi dans la portion coupée. Dans toutes les deux, la fécule apparut et augmenta simultanément.

Il résulte de ce qui précède, qu'on doit renoncer à voir dans le sol une source d'acide carbonique, d'où ce gaz serait transmis par les racines aux feuilles, pour y être décomposé. Nous pouvons donc regarder comme résolue la question que nous nous étions posée.

A des recherches ultérieures est réservée la tâche d'expliquer en détail les faits qui viennent d'être constatés.

En premier lieu, il importera d'examiner si les racines sont capables, oui ou non, d'absorber l'acide carbonique d'un sol abondamment pourvu de ce gaz.

Pour finir, je ferai connaître brièvement la disposition générale des expériences que j'ai exécutées et dont le but a été exposé ci-dessus.

Elles forment cinq séries différentes, que je décrirai chacune séparément, en quelques mots. La fécule a toujours été décelée de la manière ordinaire, à savoir par l'iode, après action préalable de la potasse et de l'acide acétique.

Série I.

Pour ces expériences je me suis servi de petites coupes plates, qui étaient munies d'un bord et avaient au centre une ouverture, également entourée d'un bord dressé. Par cette ouverture on faisait passer une feuille, qui restait unie à la plante, laquelle se trouvait dans un pot rempli de terre de jardin riche en humus. Autour du pétiole ou de la tige, l'ouverture était bouchée hermétiquement. On versait une solution de potasse dans la coupe, après quoi la feuille était recouverte d'une cloche de verre. L'air ainsi confiné communiquait avec l'atmosphère par un tube rempli de fragments de pierre ponce imbibés de potasse. La feuille se trouvait donc dans un milieu privé d'acide carbonique, tandis que la racine était entourée d'une terre riche en humus. A côté il y avait toujours, dans le même appareil, une plante servant de contrôle; mais ici la cloche plongeait par ses bords dans une couche d'eau, et son contenu communiquait directement, par un petit tube, avec l'air ambiant. Souvent il y avait encore une seconde plante de contrôle, entièrement exposée à l'air libre.

De temps en temps, de petits fragments de feuilles étaient prélevés pour la recherche de la fécule. Lorsque, au début de l'expérience, les feuilles ne renfermaient pas de fécule, la feuille placée sur la solution de potasse restait dans cet état, même quand l'expérience durait huit jours. Les feuilles-témoins, bien entendu, ne tardaient pas à former abondamment de la fécule.

Lorsque, au contraire, la feuille introduite dans l'espace privé d'acide carbonique était, au début de l'expérience, remplie de

fécule, on voyait bientôt celle-ci disparaître, même à la lumière la plus vive, et cela presque aussi rapidement que si la plante avait été placée dans l'obscurité.

Les plantes soumises à l'expérience sont les suivantes: *Phaseolus multiflorus*, *Cucurbita Pepo*, *Tropaeolum nanum* et *Beta vulgaris* var. *saccharifera.*

Par cette série d'expériences nous sommes donc amenés à conclure que, dans un milieu toujours privé d'acide carbonique, les feuilles ne produisent jamais de fécule en quantité appréciable, et qu'en outre la fécule déjà existante y disparaît, lors même que ces feuilles restent unies à la plante et que les racines plongent dans une terre riche en humus.

Série II.

Pour les expériences de cette série, je me suis servi de feuilles, privées de fécule, appartenant à des plantes aquatiques monocotylédones (*Typha latifolia*, *Typha stenophylla* et *Sparganium ramosum*). La feuille était introduite dans la tubulure d'une cloche de verre calibrée, où on la fixait hermétiquement au moyen d'un bouchon coupé en deux, de sorte que la partie inférieure de la feuille se trouvait dans la cloche. Celle-ci reposait sur l'eau, et dans le bouchon passait en outre un petit tube, par lequel pouvait être amené de l'acide carbonique. La partie moyenne et la plus petite de la feuille restait à l'air libre, mais était entourée d'une enveloppe noire. La partie supérieure plongeait au contraire, tout comme l'inférieure, dans une cloche, laquelle avait toutefois, cela va sans dire, sa tubulure tournée vers le bas. Cette cloche était fermée hermétiquement par le haut, au moyen d'une plaque de verre et d'un lut gras. A l'air de la cloche inférieure on ajoutait 5 pour cent d'acide carbonique; la cloche supérieure contenait une petite quantité d'une forte solution de potasse. La partie inférieure de la feuille se trouvait donc dans une atmosphère très riche en acide carbonique, la partie moyenne

à l'air libre, la partie supérieure dans un espace dépouillé d'acide carbonique. Au bout de un ou deux jours, les trois parties étaient examinées quant à l'existence de la fécule. Celle-ci se montrait alors toujours en abondance dans la partie inférieure, mais manquait toujours complétement dans la partie supérieure, de même, naturellement, que dans la partie moyenne, qui avait été soustraite à la lumière.

Une portion de feuille ne peut donc jamais, dans un espace constamment privé d'acide carbonique, donner naissance à une quantité appréciable de fécule, même lorsque la partie inférieure de cette feuille se trouve dans de l'air à 5 pour cent d'acide carbonique, et qu'une petite partie intermédiaire est exposée à l'air libre.

Série III.

Cette série avait pour but de ne laisser, entre l'espace riche en acide carbonique et l'espace privé de cet élément, aucune portion de feuille en contact avec l'air libre. Je voulais ainsi exclure la possibilité que l'acide carbonique, sur son chemin vers l'espace dépourvu de ce gaz, ne se dégageât en grande partie dans l'atmosphère. Ces expériences eurent lieu sur des feuilles sans fécule des plantes suivantes: *Cucurbita Pepo*, *Vitis vinifera*, *Cercis Siliquastrum*, *Viola suava*, *Polygonum bistorta* et *Trifolium pratense*.

Deux capsules de verre, de même grandeur et à bords usés à l'émeri, étaient superposées, les ouvertures tournées l'une vers l'autre. La feuille était placée entre deux, de manière que son sommet se trouvait dans l'espace formé par les capsules, tandis que la base, le pétiole et quelquefois une partie de la tige restaient en dehors. La fermeture hermétiqne s'obtenait au moyen d'un enduit de graisse. Bien entendu, je m'assurais toujours, après l'expérience, que les feuilles employées n'avaient en rien souffert de l'opération. La capsule inférieure contenait une solution de potasse.

Tout l'appareil était ensuite placé sous une cloche de verre calibrée. Celle-ci reposait sur l'eau, et à l'air qui s'y trouvait ainsi confiné on ajoutait, au moyen d'un petit tube, environ 5 pour cent d'acide carbonique. La base et le pétiole de la feuille étaient donc enveloppés de cet air. Après un intervalle de 5 à 8 heures, on recherchait la fécule, tant dans le sommet que dans la base de la feuille; toujours on trouva que le premier en était resté entièrement dépourvu, tandis que la base s'en montrait naturellement remplie dans toutes les expériences.

Nous concluons donc: une partie de feuille ne peut jamais former de fécule dans un espace d'où l'acide carbouique est absent, même quand la partie immédiatement voisine se trouve dans de l'air à 5 pour cent d'acide carbonique et que par conséquent, entre ces deux parties, l'air atmosphérique ne peut exercer son influence sur la feuille.

Série IV.

Pour ces expériences on a pris des feuilles, dépourvues de fécule et partagées en deux suivant la nervure médiane, de *Cercis Siliquastrum*, *Valeriana Phu*, *Bergenia bifolia*, *Polygonum bistorta* et *Phaseolus nanus.*

Une cloche de verre, tubulée et calibrée, était renversée et plongeait par sa tubulure dans l'eau. L'ouverture, maintenant tournée vers le haut, était recouverte d'une plaque de verre, et la fermeture rendue hermétique au moyen d'un lut gras. Entre la plaque de verre et le bord de la cloche, entouré de graisse, était placée l'une des moitiés de la feuille, de telle sorte que son sommet séjournât à l'air libre, mais que sa base et le pétiole se trouvassent à l'intérieur de la cloche. L'autre moitié de la même feuille était posée sur la plaque de verre et restait ainsi entièrement exposée à l'air libre. Dans l'air de la cloche on introduisait alors, au moyen d'un petit tube, environ 4 pour cent d'acide carbonique. La base d'une des moitiés de la feuille avait donc

à sa disposition une très grande quantité de ce gaz. L'appareil était ensuite placé à la lumière, et, après des intervalles de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ heure, etc., on recherchait la fécule dans des fragments du sommet de chacune des deux moitiés de feuille. Le résultat apprit que dans les deux sommets la fécule apparaissait exactement au même instant et augmentait tout à fait de la même manière.

Ces expériences établissent donc qu'une abondante proportion d'acide carbonique, dans l'air qui entoure le pétiole et la base de la feuille, ne peut jamais accélérer d'une manière sensible la production de la fécule dans le sommet de la feuille, lorsque celui-ci se trouve à l'air libre.

Série V.

La feuille non féculente d'une plante (*Valeriana Phu*, *Trifolium pratense*, *Cucurbita Pepo*, *Phaseolus nanus*) enracinée dans une terre de jardin riche en humus était coupée longitudinalement en deux, de telle sorte qu'une des moitiés restât unie à la plante et à la racine. Les deux moitiés, placées l'une à côté de l'autre sur une plaque de verre, étaient alors exposées à la lumière.

Opéré après des intervalles de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ heure etc., l'examen devait de nouveau décider si la portion de feuille restée unie à la racine accuserait la présence de la fécule avant la portion détachée de la plante et placée à côté de la première. Ici encore, la fécule se montra et augmenta en quantité tout à fait simultanément dans les deux moitiés de la feuille.

Les résultats essentiels de ces recherches se laissent résumer de la manière suivante:

1°. L'acide carbonique, fourni en excès à l'une ou à l'autre partie souterraine ou aérienne d'une plante, ne peut faire naître

des quantités appréciables de fécule dans une feuille ou portion de feuille organiquement unie à cette partie et placée dans un espace ne contenant pas d'acide carbonique (séries I, II et III).

2°. L'acide carbonique, fourni en excès à l'une ou à l'autre partie souterrraine ou aérienne d'une plante, ne peut accélérer d'une manière appréciable, dans une feuille ou portion de feuille organiquement unie à cette partie, la formation de fécule qui s'y fait à l'air libre (séries IV et V.)

3°. L'acide carbonique que la racine d'une plante rencontre dans le sol ne peut, dans les feuilles de cette plante, ni déterminer la formation d'une quantité appréciable de fécule lorsqu'elles séjournent dans de l'air privé d'acide carbonique, ni accélérer d'une manière appréciable la formation de fécule qui y a lieu sous la seule influence de l'air libre.

Utrecht, Décembre 1876.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

RECHERCHES

SUR

LA THÉORIE DES FLAMMES,

PAR

R. A. MEES.

En dépit des belles et nombreuses recherches auxquelles ont été soumises les flammes en général et plus spécialement celles des hydrocarbures, les physiciens et les chimistes sont encore partagés au sujet de l'explication à donner de la lumière de ces dernières. Tandis que, pour les autres flammes, tout le monde s'accorde à attribuer leur lumière à l'incandescence de matières qui s'y trouveraient à l'état de vapeur ou de gaz, cette unanimité n'existe plus à l'égard de la flamme de l'hydrogène carboné. Jusqu'à une époque assez récente, il est vrai, on a généralement admis, à la suite de Davy, que le grand pouvoir éclairant, par lequel cette flamme se distingue de la plupart des autres et auquel elle emprunte principalement son intérêt pratique pour l'homme, était dû à l'incandescence de particules charbonneuses, qui y existeraient à l'état *solide;* mais dans ces derniers temps, surtout depuis les remarquables études de M. Frankland sur la lumière des flammes de l'hydrogène et de l'oxyde de carbone dans des conditions variées de pression et de densité du gaz

combustible [1]), beaucoup de savants, et en premier lieu M. Frankland lui-même, ont cru devoir renoncer à l'ancienne explication de Davy, et pouvoir attribuer la lumière des flammes des hydrocarbures, tout comme celle des autres, à des particules incandescentes *gazeuses*. M. Frankland avait trouvé, en effet, que l'hydrogène, qui dans les circonstances ordinaires brûle avec une flamme si peu lumineuse, devient de plus en plus éclairant lorsque sa combustion s'opère sous une pression plus élevée. Sous la pression de dix atmosphères, il donnait assez de lumière pour qu'à deux pieds de distance on pût lire un journal. La même chose fut observée, à un degré encore plus prononcé, avec la flamme de l'oxyde de carbone. M. Frankland en conclut que le pouvoir éclairant d'une flamme, dans laquelle les matières se trouvent à l'état gazeux, augmente rapidement avec la densité du gaz; or, comme il avait déjà trouvé antérieurement [2]), que le pouvoir lumineux de la flamme de l'hydrogène carboné décroît fortement aussi avec la pression de l'atmosphère dans laquelle elle est placée, il s'était cru autorisé à penser qu'on n'a pas besoin, pour expliquer la lumière de la flamme des hydrocarbures, d'une hypothèse particuliere, telle que celle de Davy, mais qu'on peut attribuer le pouvoir éclairant de cette flamme au rayonnement de vapeurs d'hydrocarbures, denses mais transparentes. Il fut fortifié dans cette opinion par la remarque que beaucoup de flammes, telles que celles de l'arsenic, du phosphore, du sulfure de carbone, sont aussi très lumineuses quand la combustion s'opère dans l'oxygène, bien qu'il soit impossible d'y admettre la présence d'une matière solide.

La continuité du spectre des flammes des hydrocabures ne pouvait pas non plus être regardée comme une preuve de l'existence de particules incandescentes solides, car toutes les flammes très lumineuses dont il vient d'être question, étudiées

---

[1]) *Proceedings of the Royal Society*, XVI, p. 419, June 11, 1868; *Phil: Mag.*, (4) vol 36, p. 309; *Comptes rendus*, 12 Octobre 1868, t. 67 p. 736; *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, Suppl. Bd. 6, S. 308.

[2]) *Phil. Trans.* (1861), vol. 151, p. 629.

par M. Frankiand, donnèrent également des spectres continus.

Aussi, lorsque M. Knapp, en 1870 [1]), et d'autres après lui, eurent montré que le pouvoir lumineux peut être enlevé au gaz de l'éclairage en mêlant celui-ci, avant la combustion, avec des gaz indifférents, tels que l'azote, l'acide carbonique, l'acide chlorhydrique, l'oxyde de carbone, l'hydrogène ou la vapeur d'eau, quelques-uns virent dans ce fait une nouvelle confirmation des idées de M. Frankland, parce qu'ils admettaient qu'ici encore la diminution du pouvoir lumineux devait être attribuée à la raréfaction du gaz de l'éclairage par les autres gaz avec lesquels on l'avait mélangé. On alla même jusqu'à chercher aussi la cause du faible pouvoir éclairant de la flamme de Bunsen dans la dilution du gaz par son mélange avec l'air.

Ainsi se développa peu à peu, en opposition à l'hypothèse de Davy, une seconde hypothèse, que nous pouvons appeler celle de Frankland; et, entre ces deux hypothèses, les physiciens et les chimistes sont aujourd'hui partagés.

Pour moi l'ancienne théorie de Davy est encore restée la plus probable. Premièrement, en effet, je pense que tous les phénomènes observés jusqu'ici se laissent expliquer par elle tout aussi bien, sinon mieux, que par celle de Frankland. En second lieu, je suis arrivé à quelques résultats expérimentaux, d'où ressort avec toute évidence que la flamme de l'hydrogène carboné diffère, quant à son essence, de la plupart des autres flammes que j'ai étudiées, et qui rendent très probable qu'il y a effectivement des particules à l'état solide dans cette flamme.

Que la densité d'un gaz ait une grande influence sur la nature de la lumière émise par ce gaz à l'état incandescent, et par conséquent aussi sur la nature du spectre produit par cette lumière, qu'un changement apporté dans cette densité puisse aussi modifier considérablement, outre la nature, l'intensité de cette lumière, cela, à coup sûr, doit être pleinement concédé

[1]) *Journ. f. praktische Chemie, Neue Folge*, Bd. 1. S. 428.

à M. Frankland. Mais l'influence de cette densité ne doit pas être exagérée. Elle n'est qu'un des nombreux facteurs qui déterminent la nature et l'intensité de la lumière. M. H. Sainte-Claire Deville a déjà fait remarquer [1], à propos des recherches de M. Frankland, que dans ces expériences la température peut aussi être considérée comme un facteur actif, car elle aussi subit de grandes variations; et il a fait voir, par différents exemples, que dans beaucoup de cas c'est probablement à l'élévation de la température que doivent être attribuées l'intensité plus forte de la lumière et la continuité plus grande de son spectre.

L'épaisseur de la couche de gaz qui émet les rayons lumineux peut également avoir une grande influence sur l'intensité et la nature de la lumière. L'effet présumable de chacune des trois conditions que nous venons d'indiquer a été surtout très bien analysé, dans la mesure où il est possible aujourd'hui de porter un jugement à cet égard, par M. Wüllner, dans son Traité de physique expérimentale [2]).

Outre la nature de la matière incandescente et son état d'agrégation, nous avons donc déjà trouvé trois autres facteurs, l'épaisseur, la densité et la température de la couche rayonnante, qui peuvent exercer une grande influence sur la nature et l'intensité de la lumière émise. Mais il y en a, à ce qu'il semble, encore d'autres. Avant d'en parler, toutefois, nous devons encore présenter une remarque sur les expériences de M. Frankland et sur les conclusions qu'il en tire.

M. Frankland trouve par ses expériences que l'hydrogène et l'oxyde de carbone, lorsqu'on leur donne par la pression une grande densité, brûlent avec une flamme lumineuse; il trouve ensuite que le pouvoir éclairant de la flamme de l'hydrogène carboné varie aussi beaucoup avec la pression, c'est-à-dire avec la densité de l'atmosphère, et il se croit autorisé par là à attri-

---

[1]) *Comptes rendus*, 30 novembre 1868, t. 67, p. 1089; *Phil. Mag.* (4) vol. 37, p. 111.

[2]) A. Wüllner, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. II, Dritte Auflage (1875), S.S. 244—258.

buer la lumière intense de cette dernière flamme, dans les conditions ordinaires, à l'incandescence d'hydrocarbures *denses* et très élevés, à l'état de vapeur. Mais il compare ici deux cas de grande densité qui diffèrent beaucoup l'un de l'autre. Dans les premières circonstances où il vit l'intensité lumineuse croître avec la densité, cette densité plus grande était obtenue par un plus grand rapprochement des molécules; dans la flamme ordinaire de l'hydrogène carboné, nous avons au contraire, en adoptant l'hypothèse de Frankland sur la constitution de cette flamme, une grande densité, non parce que les molécules sont alors à de moindres distances l'une de l'autre, mais parce qu'elles sont composées d'un grand nombre d'atomes, parce qu'elles ont une structure très complexe. Ces deux cas ne peuvent être identifiés entre eux. Des phenomènes observés dans le premier cas, il n'est pas permis de conclure à l'existence de phénomènes semblables dans le second.

Mais la complexité plus ou moins grande des molécules doit-elle être considérée comme l'un des facteurs qui déterminent la nature et l'intensité de la lumière? Les recherches si intéressantes de M. J. Norman Lockyer [1]) tendent à le faire croire. Par ses observations spectroscopiques, il a non-seulement montré que la lumière émise par un gaz contient plus de couleurs différentes et fournit par conséquent un spectre plus riche et plus rapproché d'un spectre continu, à mesure que la densité augmente; il a en outre rendu très probable que l'accroissement de complexité de la structure des molécules agit dans le même sens que l'accroissement de densité. Le spectre de la lumière des composés est, comme on le savait déjà antérieurement, plus voisin d'un spectre par-

[1]) *Researches in Spectrum Analysis in connexion with the Spectrum of the Sun*, *Proc. of the Roy-Soc.* Dec. 12, 1872, May 8 and Nov. 27, 1873; *Phil. Mag.* (4) vol. 45, p. 147, vol. 46, p. 407, vol. 47, p. 384, vol. 49, p. 326; *Phil. Trans.* (1873) vol. 163, p.p. 253 and 639, (1874) vol. 164, p.p. 479 and 805. *Spectroscopic Notes*, *Proc. of the Roy. Soc* Jun. 11, 1874; *Phil. Mag.* (4) vol. 49, p.p. 233 and 320; *Pogg. Ann.* Bd. 155, S. 136. Je laisse de côté les Mémoires antérieurs, soit de M. Lockyer seul, soit de M. Lockyer en collaboration avec M. Frankland, où il est traité surtout de l'influence de la densité.

faitement continu que celui de la lumière des métaux; vraisemblablement, parce que les molécules des premiers ont une structure moins simple que celles des derniers. Mais les molécules d'une seule et même matière, par exemple d'un élément, paraissent aussi pouvoir posséder, dans des circonstances différentes, une structure plus ou moins complexe; or il semble être de règle que, plus cette structure est complexe, plus est variée la composition de la lumière émise par le gaz. Cela ne veut pas dire, bien entendu, que toutes les molécules complexes donneront un spectre se rapprochant d'un spectre continu, car il ne faut pas oublier que le degré de complexité des molécules n'est qu'un des nombreux facteurs qui interviennent dans le phénomène.

Il n'est donc pas improbable, — une énonciation plus catégorique ne serait pas justifiée par les observations de M. Lockyer, — que le spectre de la lumière des hydrocarbures *très* élevés est, à cause de la structure complexe de leurs molécules, peu différent d'un spectre continu; par suite, il n'est pas non plus entièrement impossible, — ici nous devons nous exprimer avec encore plus de réserve, attendu que les observations de M. Lockyer nous apprennent peu de chose à cet égard, — qu'à des températures relativement assez peu élevées, telles qu'on les rencontre dans la flamme de l'hydrogène carboné, ces hydrocarbures émettront déjà de la lumière d'une grande intensité. Si leur lumière donne un spectre continu, cette lumière devra certainement être peu colorée et sensiblement blanche; quant à savoir si ce sera aussi une lumière intense, brillante, c'est une autre question, à laquelle la réponse doit rester beaucoup moins affirmative.

Les résultats obtenus par M. Lockyer donnent donc un certain appui, si faible et si peu assuré qu'il soit encore, aux idées de M. Frankland concernant la flamme de l'hydrogène carboné, du moins si on les interprète en ce sens, que la grande complexité des molécules des hydrocarbures élevés, existant à l'état de vapeurs dans la flamme, sera considérée comme la cause de la lumière intense et de la continuité de son spectre. Ainsi comprise, la théorie de M. Frankland a incontestablement droit

à l'existence. Il n'est certes plus possible aujourd'hui de conclure avec assurance, de la continuité du spectre, à la présence d'une matière à l'état d'agrégation solide ou liquide. Nous connaissons, en effet, beaucoup de flammes à spectre continu, où nous savons, à n'en pas douter, que la matière se trouve sous forme de gaz ou de vapeur. Outre les flammes du phosphore, de l'arsenic et du sulfure de carbone brûlant dans l'oxygène, et celles de l'hydrogène et de l'oxyde de carbone sous pression élevée, qui sont mentionnées par M. Frankland, on peut encore citer les flammes de l'hydrogène, de l'oxyde de carbone, de l'ammoniaque et de l'hydrogène, de l'hydrogène sulfuré et du sulfure de carbone dans l'oxygène, l'air ou le protoxyde d'azote, celles de l'hydrogène dans le chlore, du soufre dans l'air, etc., flammes dont la lumière donne, ainsi que nous l'a appris M. Dibbits [1]), un faible spectre continu, qui, d'après lui, doit probablement être attribué à l'incandescence de la vapeur d'eau, de la vapeur chlorhydrique, de l'acide carbonique ou de l'acide sulfureux. La distribution de l'intensité lumineuse, dans ces spectres continus faibles, n'est toutefois, en général, pas entièrement la même que dans le spectre d'une matière solide incandescente. Les spectres continus que M. Wüllner [2]) a obtenus avec beaucoup de gaz, au moyen de l'étincelle d'un courant d'induction dans lequel était intercalée une bouteille de Leyde, sont également des preuves à l'appui de ce que nous avons dit.

Mais si l'on donne à l'hypothèse de M. Frankland l'interprétation que nous venons d'indiquer, interprétation à coup sûr très différente de celle adoptée par M. Frankland lui-même, l'hypothèse en question ne s'éloigne plus autant de celle de Davy. La seule différence est alors que, là où Davy suppose des particules solides, M. Frankland admet des vapeurs d'hydrocarbures élevés. L'une et l'autre hypothèse permettent, je crois, d'expliquer d'une manière naturelle tous les phénomènes aujourd'hui connus

---

[1]) *Ueber die Spectra einiger Gase.* Pogg. *Ann.* Bd. 122, S.S. 497 u. f.f.

[2]) Pogg. *Ann.* Bd. 137 u. 141; Wüllner, *Experimentalphysik*, Bd. II, S. 256.

au sujet de la flamme des hydrocarbures, sans qu'il soit nécessaire d'attribuer, à l'exemple de M. Frankland, une grande influence même à des changements de densité relativement faibles. C'est ce que je me propose de faire voir pour les cas les plus importants. Il me semble, en effet, qu'une pareille démonstration ne sera pas dépourvue d'intérêt en ce moment, les nouveaux phénomènes observés chez ces flammes ayant ébranlé pour beaucoup d'esprits, à tort suivant moi, la confiance dans l'ancienne théorie. Je me servirai toujours, dans les considérations qui vont suivre, des termes de l'hypothèse de Davy, mais elles s'appliqueront aussi, *mutatis mutandis*, à l'autre hypothèse, que je continuerai d'appeler, bien qu'elle s'écarte notablement de l'hypothèse originelle de M. Frankland, du nom de ce savant. Pour cette application, on n'aura qu'à lire partout, au lieu de particules solides de carbone, molécules d'hydrocarbures élevés, à l'état de vapeur, et, au lieu de dissociation des hydrocarbures, condensation polymère des hydrocarbures.

Selon Davy, la lumière de la flamme des hydrocarbures provient en grande partie des particules solides incandescentes qui se trouvent dans la flamme. Le pouvoir éclairant de ces flammes dépendra donc principalement de deux choses, d'abord du nombre des particules solides qui existent simultanément sur une même étendue superficielle dans la flamme, et ensuite de la température, car, plus celle-ci est élevée, plus sera forte l'incandescence des particules, plus chacune d'elles émettra de lumière. Les particules de carbone solides proviennent de la dissociation des hydrocarbures, et elles disparaissent de nouveau en se combinant avec l'oxygène de l'air. La propriété, pour une flamme d'hydrocarbure, d'être peu lumineuse ou très lumineuse, sera donc déterminée par le rapport entre la rapidité avec laquelle les hydrocarbures se dissocient en entrant dans la flamme et celle avec laquelle les particules charbonneuses formées se combinent avec l'oxygène. Toutes les circonstances qui font croître la vitesse de dissociation plus fortement que la vitesse de combustion, ou qui la font décroître moins fortement que celle-ci, renforceront donc le pouvoir éclairant, parce

qu'elles augmenteront le nombre des particules qui existent simultanément dans la flamme; toute circonstance, au contraire, qui fait que la vitesse de combinaison croît plus fortement ou décroît moins fortement que la vitesse de dissociation, doit affaiblir le pouvoir éclairant de la flamme. A chacune de ces deux actions il y a toutefois une limite. Si la vitesse de dissociation devient par trop grande relativement à la vitesse de combinaison, le nombre des particules de carbone mises en liberté dans un temps donné devient trop considérable pour que l'oxygène puisse les brûler toutes; beaucoup de ces particules échappent alors à la combustion, la flamme devient fuligineuse. Si au contraire la vitesse de combinaison s'accélère trop par rapport à la vitesse de dissociation, la flamme ne contient presque pas de particules solides, parce que celles qui se forment brûlent aussitôt après qu'elles ont été dégagées; le pouvoir éclairant disparaît alors presque entièrement, et ce qui en reste doit être attribué à l'incandescence des gaz. Une température plus élevée a une double influence sur la flamme: elle augmente le pouvoir éclairant, d'abord parce qu'elle rend plus vive l'incandescence de chaque particule, et en second lieu parce qu'elle favorise la dissociation et accroît ainsi le nombre des particules de carbone que la flamme tient en suspension à un même instant.

Appliquons ces principes à l'explication de quelques-uns des principaux phénomènes.

1°. La variation du pouvoir éclairant produite par la variation de pression de l'atmosphère dans laquelle la flamme brûle. Nous pourrions nous contenter de renvoyer ici à l'explication qu'avait donnée M. Frankland [1]) alors qu'il croyait encore à l'hypothèse de Davy, explication qui me paraît très satisfaisante. Il avait montré que le pouvoir éclairant de la flamme croît ou décroît suivant que croît ou décroît la pression de l'atmosphère ambiante, et que, entre certaines limites, les valeurs de ces variations de pouvoir lumineux et de pression sont presque exactement propor-

---

[1]) *Phil. Trans.* (1861), vol. 151, p.p. 648—653.

tionnelles l'une à l'autre. Des flammes qui éclairaient bien à la pression ordinaire devenaient, ainsi que l'observa M. Frankland, fuligineuses à des pressions plus élevées. Il fit voir ensuite que la diminution du pouvoir éclairant dans une atmosphère plus rare ne doit pas être attribuée à une combustion moins parfaite; qu'en outre la raréfaction ou la condensation de l'atmosphère n'a, au moins entre certaines limites, presque aucune influence sur la température de la flamme, de sorte que la variation du pouvoir lumineux ne peut pas non plus être mise sur le compte d'une variation de température. Il crut en trouver l'explication dans les obstacles qu'éprouve le mouvement des molécules gazeuses, obstacles qui seraient moindres dans un milieu rare que dans un milieu dense. Avec une pression faible, l'oxygène de l'air pourrait mieux pénétrer à l'intérieur de la flamme et s'unir, plus rapidement après leur mise en liberté, aux molécules de carbone; sous une pression plus forte, au contraire, l'oxygène ne parviendrait que difficilement à l'intérieur de la flamme, ce qui laisserait aux particules de carbone une plus longue existence avant d'être brûlées et changées en acide carbonique, ou même leur permettrait de quitter la flamme sans avoir subi la combustion. Je crois que cette explication de M. Frankland est, sinon meilleure, au moins tout aussi bonne que celle qu'il a donnée postérieurement, lorsqu'à l'hypothèse de Davy il a substitué la sienne, en attribuant le faible pouvoir éclairant de la flamme, sous pression réduite, à la faible densité du gaz combustible. Dans cette dernière hypothèse, en effet, on ne s'explique pas pourquoi le pouvoir éclairant varie incomparablement plus vite, avec la pression, pour la flamme de l'hydrogène carboné que pour celles de l'hydrogène et de l'oxyde de carbone; car les expériences de M. Frankland prouvent que la flamme de l'hydrogène carboné est extrêmement sensible à de petites variations de pression, tandis que, pour obtenir une lumière un peu forte avec l'hydrogène ou l'oxyde de carbone, il dut élever la pression à dix ou même à quatorze atmosphères.

2°. La flamme de Bunsen. A ce sujet, quelques mots suffiront.

L'introduction jusqu'au centre de la flamme d'une grande quantité d'oxygène atmosphérique est ici la cause principale du peu de lumière. Il en résultera, en effet, que la vitesse avec laquelle les particules de carbone s'unissent à l'oxygène sera fortement accrue; il est vrai que, par suite de la température plus élevée de la flamme, la vitesse de dissociation augmentera aussi, et chaque particule éprouvera une incandescence plus vive; mais, pour avoir une très bonne explication du défaut de lumière de la flamme de Bunsen, il suffit d'admettre que la vitesse de combinaison augmente beaucoup plus fortement que la vitesse de dissociation, de manière qu'il n'y ait à chaque instant qu'un petit nombre de particules solides dans la flamme. Il n'est d'ailleurs pas impossible non plus que le défaut de lumière soit dû en tout ou en partie à ce que, comme l'admet M. R. Blochman [1]), une petite quantité du gaz combustible brûle déjà à l'intérieur de la flamme, tandis que le reste, en proportion plus considérable, s'y transformerait en hydrogène et en oxyde de carbone, gaz qui l'un et l'autre brûlent avec peu de lumière. Mais, quelque opinion que l'on ait sur le plus ou moins de probabilité de cette formation d'oxyde de carbone, comme découlant des recherches faites sur la nature des gaz à l'intérieur de la flamme, toujours est-il qu'on n'en a pas absolument besoin pour expliquer la flamme de Bunsen. Quant à la dilution du gaz par l'azote de l'air, sans vouloir nier qu'elle puisse influer aussi, de la manière qui sera dite plus loin, sur l'intensité lumineuse de la flamme, je crois qu'elle est ici chose accessoire, et non cause principale.

3°. La disparition du pouvoir lumineux de la flamme par l'effet du mélange d'autres gaz avec le gaz de l'éclairage.

Beaucoup d'expériences ont été faites à ce sujet, par Knapp [2]), Blochmann [3]), Stein [4]), Sandow [5]) et autres. Par l'addition d'azote,

---

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, Bd. 168, S. 355.

[2]) *l. c.*

[3]) *l. c.*, S.S. 338 u. ff. und S. 355.

[4]) *Journ. f. prakt. Chem.*, *Neue Folge*, Bd. 9, S. 180.

[5]) D'après une communication de M. Wibel, *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, Jahrg. 8, S. 226.

d'acide chlorhydrique, d'acide carbonique, de vapeur d'eau, d'oxyde de carbone et d'hydrogène au gaz de l'éclairage, celui-ci perd son pouvoir lumineux. Avec M. Blochmann, j'incline à expliquer ce fait en admettant que, par le mélange avec des gaz ne fournissant pas de particules de carbone, le nombre des ces particules, qui se trouvent dans un volume donné ou sur une étendue donnée de la surface de la flamme, devient beaucoup plus petit, de sorte qu'elles sont immédiatement brûlées par l'oxygène de l'air.

Les quatre premiers des gaz en question abaisseront en outre la température de la flamme, d'où résultera une moindre vitesse de dissociation et une incandescence moindre des particules de carbone. Il n'est pas impossible non plus que, par le mélange avec d'autres gaz, le gaz de l'éclairage éprouve une diminution dans sa vitesse de dissociation. C'est du moins ce que semblent indiquer des expériences de M. Berthelot, sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

4°. La restitution du pouvoir lumineux au gaz de l'éclairage mêlé avec d'autres gaz.

M. F. Wibel [1]) a fait passer le gaz de l'éclairage mélangé avec l'acide carbonique, l'azote, l'hydrogène ou l'air à travers un tube de platine, et l'a fait brûler à sa sortie du tube. Il a obtenu alors une flamme nòn éclairante. Mais ayant ensuite chauffé le tube de platine, il vit la flamme regagner son pouvoir lumineux et reprendre tout à fait l'aspect de la flamme ordinaire du gaz de l'éclairage; le spectre était aussi redevenu un spectre continu et brillant. Il trouva encore qu'on obtient le même résultat en chauffant, au moyen d'une couple de flammes de Bunsen, l'enveloppe extérieure de la flamme non lumineuse du gaz de l'éclairage mélangé avec l'acide carbonique.

Postérieurement, M. Heumann [2]) a encore montré qu'il n'est pas nécessaire de chauffer le gaz de l'éclairage lui-même, mais qu'on rend aussi la flamme lumineuse en chauffant fortement le gaz indifférent, avant de le mêler au gaz de l'éclairage; il faut

---

[1]) *Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch.*, Jahrg. 8, S. 226,

[2]) *Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch.*, Jahrg. 8, S. 745.

seulement empêcher, par exemple en employant un brûleur en verre au lieu d'un brûleur métallique, que le mélange ne se refroidisse trop avant d'atteindre la flamme.

Cette récupération du pouvoir éclairant trouve une explication plausible dans l'élévation de température que subit le mélange gazeux. Par là, en effet, la vitesse de dissociation devient plus grande et l'incandescence des particules de carbone plus vive; la flamme doit donc reprendre de l'éclat.

En répétant l'expérience de Wibel, avec un brûleur de Bunsen auquel était adapté un tube de platine recourbé, j'ai trouvé que la flamme, même quand on ne chauffait pas le tube de platine, était un peu plus lumineuse, surtout à la pointe, que lorsque le gaz s'écoulait par un tube ordinaire en laiton. Cela s'observait, soit que le gaz s'écoulât dans la direction horizontale, soit qu'il sortît dans la direction verticale. Parfois l'intensité lumineuse de la pointe de la flamme n'atteignait qu'au bout de quelque temps sa valeur maximum, qui toutefois différait généralement peu de l'intensité initiale. Il est probable que le résultat en question doit être attribué à ce que, le platine ayant une chaleur spécifique beaucoup plus faible que le laiton, et aussi un pouvoir conducteur plus faible, l'extrémité du tube de platine était échauffée un peu plus fortement par la flamme que celle du tube de laiton, de sorte que le mélange gazeux acquérait déjà dans le tube de platine une température un peu plus élevée; en outre, le laiton enlevait, par la même raison, plus de chaleur à la flamme que le platine, ce qui donnait à la flamme une température un peu plus haute avec le tube de ce dernier métal. En supposant maintenant que l'afflux de l'air ait été tel, que le pouvoir éclairant de la flamme fût détruit tout juste lorsque le gaz s'écoulait par le tube de laiton, la température un peu plus élevée de la flamme, dans le cas du tube de platine, pourra rendre compte du léger accroissement d'intensité lumineuse. Quand le tube de platine était refroidi par de la neige jusqu'à l'embouchure, la grandeur de la pointe lumineuse de la flamme diminuait sensiblement, mais il me fut impossible d'arriver ainsi à la supprimer totalement. L'explication

que je viens de donner est corroborée par le fait que, lorsque le mélange gazeux s'écoulait par un tube de verre, la flamme était encore beaucoup plus lumineuse qu'avec le tube de platine. Elle éclairait alors non seulement à sa pointe, mais sur une grande partie de son étendue, tout comme la flamme ordinaire du gaz de l'éclairage. Cela tient très probablement au faible pouvoir conducteur du verre, grâce auquel l'extrémité du tube de verre s'échauffait fortement et enlevait moins de chaleur à la flamme. Le spectre de celle-ci prouvait d'ailleurs que la lumière ne pouvait être attribuée à la présence, dans la flamme, de vapeurs incandescentes de sodium, qui se seraient dégagées du verre.

Je dois encore faire remarquer que ces expériences demandent certaines précautions. Lorsqu'on prolonge le tube du brûleur de Bunsen par des tubes en laiton de ½ à 1 mètre de longueur, et qu'on n'allume le gaz qu'à sa sortie de ce long tube, on obtient, même sans chauffer le tube, une flamme émettant une lumière assez forte sur une grande partie de son étendue. La raison en doit être cherchée, selon toute apparence, non dans un changement de température, mais dans une modification du rapport entre les quantités de gaz combustible et d'air que contient le mélange gazeux. Si, en effet, par l'adaptation d'un long tube, l'ouverture d'écoulement est reportée à une plus grande distance des ouvertures qui donnent accès à l'air, le courant du gaz de l'éclairage possède au niveau de ces ouvertures une vitesse moindre, et en conséquence entraîne moins d'air par aspiration. Le changement d'aspect de la flamme est la conséquence nécessaire de cette réduction de la quantité d'air dans le mélange combustible.

Pour échapper à cette influence d'une modification de composition du mélange gazeux, je donnai au tube de verre, dans les expériences ci-dessus décrites, la même largeur et tout au plus la même longueur qu'avait le tube en laiton du brûleur, dont il prenait la place; quant au tube de platine, qui ne différait que peu en longueur du tube de laiton du brûleur et avait environ le même diamètre que celui-ci, j'en fis l'expérience non seulement après l'avoir ajouté

comme prolongement au tube de laiton, mais aussi après l'avoir substitué à ce dernier.

Il ne saurait être question ici de l'influence d'un changement de densité du gaz combustible; car, si pareil changement avait lieu, il consistait nécessairement, à raison de l'élévation de température, en une dilatation, et celle-ci aurait produit une diminution plutôt qu'un accroissement d'intensité lumineuse.

Mes observations montrent donc l'extrême sensibilité de la flamme de Bunsen, pour un mélange déterminé de gaz de l'éclairage et d'air, aux variations de température; une élévation relativement faible de la température peut modifier considérablement le pouvoir éclairant et même la nature de la flamme de Bunsen.

Lorsque les ouvertures au bas du brûleur de Bunsen étaient fermées, et que celui-ci était pourvu du tube de platine, on obtenait la flamme ordinaire du gaz de l'éclairage. Tant que le platine n'était pas chauffé, la flamme brûlait alors tranquillement, sans fumer; mais, des qu'on élevait la température du platine, la flamme devenait très fuligineuse; preuve nouvelle que l'action de l'échauffement consiste simplement en une augmentation de la vitesse de dissociation.

Je crois que les phénomènes, dont il vient d'être rendu compte, confirment très sérieusement ma manière de voir concernant la flamme de l'hydrogène carboné, attendu que seule elle fournit une explication naturelle de ces phénomènes. Dans le Mémoire cité de M. Heumann, on trouve encore décrits un grand nombre de faits remarquables ayant rapport au pouvoir lumineux des flammes, et qui tous peuvent être expliqués de la même manière. Tous ils démontrent qu'une élévation de la température de la flamme augmente l'intensité lumineuse parce que la vitesse de dissociation et l'incandescence des particules de carbone dégagées sont alors accrues, et que, par la même raison, un abaissement de la température a pour conséquence une diminution de l'intensité lumineuse. Tous ils établissent qu'un plus grand afflux d'oxygène, et, en général, toute cause pouvant favoriser le contact de la

surface de la flamme avec l'oxygène ambiant ou la pénétration de cet oxygène à l'intérieur de la flamme, entraînent une diminution de l'intensité lumineuse en vertu de l'accroissement de la rapidité de combustion des particules de carbone mises en liberté; à moins que, par cette combustion plus vive, la température de la flamme ne s'élève assez pour que la vitesse de dissociation et surtout l'incandescence des particules de carbone subissent une augmentation plus forte que la vitesse de combustion. Quant à ce dernier effet, on en a des exemples dans la grande intensité lumineuse du gaz de l'éclairage mêlé avec l'oxygène, dans l'extrême difficulté qu'on éprouve à abolir le pouvoir éclairant au moyen d'un afflux très abondant d'oxygène, enfin dans le fait mentionné par M. Blochmann [1]), que, suivant M. Silliman et M. Wurtz, le gaz très riche en carbone de New-York, qui contenait 2 pour cent d'air, perdait un peu de sa force lumineuse lorsque cet air lui était enlevé.

Tous les phénomènes jusqu'ici connus relativement aux flammes des hydrocarbures se laissent donc très bien expliquer par l'ancienne hypothèse de Davy, comme aussi par celle de M. Frankland, lorsqu'on l'interprète de la manière que j'ai indiquée.

Quant à savoir si la flamme doit sa lumière à l'incandescence de particules solides ou bien à celle de vapeurs denses d'hydrocarbures élevés, c'est une question qui reste encore indécise, les phénomènes dont je viens de parler ne suffisant du moins pas à la trancher d'une façon définitive. La circonstance que l'on sait positivement que les particules solides émettent à la température de la flamme une vive lumière, donnant au spectroscope un spectre continu, tandis que la chose est encore incertaine pour les vapeurs des hydrocarbures élevés, surtout en ce qui concerne le premier point, celui du grand pouvoir lumineux, cette circonstance, dis-je, plaide certainement un peu en faveur de l'opinion de Davy, et lui donne au moins un degré de probabilité de plus qu'à celle de Frankland.

Les recherches chimiques concernant les transformations que les hydrocarbures subissent à des températures élevées paraissent

[1]) Blochmann, *l. c.*, S. 355; *Journal of Gaslighting*, 1869, p. 762.

aussi témoigner en faveur de Davy. Suivant M. Berthelot [1]), l'éthylène ou gaz oléfiant et le formène ou gaz des marais perdent de l'hydrogène à une température assez modérée et se transforment en acétylène, lequel donne ensuite naissance à des hydrocarbures supérieurs, tels que la benzine, le styrolène, la naphtaline, l'acénaphtène, etc. On pourrait croire d'après cela que M. Frankland a raison, et que dans la flamme se trouvent des vapeurs d'hydrocarbures élevés, puisque M. Berthelot a vu s'en former de pareils, sous l'influence de la chaleur, aux dépens des hydrogènes carbonés du gaz de l'éclairage. Mais il faut remarquer d'abord que M. Berthelot n'a opéré qu'à des températures relativement assez basses, et, de ce que celles-ci ont favorisé l'union des hydrocarbures inférieurs et leur transformation en hydrocarbures plus composés, d'ordre supérieur, il ne suit nullement que la même chose aurait lieu à la haute température de la flamme. Je regarde même comme plus probable, que la tendance à la combinaison, qui existe à une chaleur médiocre, est remplacée, à la température élevée qui règne dans la partie lumineuse de la flamme, par une tendance à la dissociation. En second lieu, je trouve noté chez M. Blochmann [2]) que, toujours d'après M. Berthelot, le gaz des marais, chauffé, se résout en partie en ses éléments, tandis que l'autre partie est transformée en acétylène; ensuite, que cet acétylène, qui prend aussi naissance aux dépens de l'éthylène, se transforme il est vrai, au rouge sombre, peu à peu en hydrocarbures supérieurs, par condensation polymérique de plusieurs molécules, mais qu'en présence du carbone il se résout en ses éléments, et que cette décomposition, bien que ralentie en présence de l'azote, de l'oxyde de carbone, etc., n'est pas arrêtée dans ces conditions [3]). Le gaz des marais et l'éthylène, les principaux hydrocarbures du gaz de l'éclairage,

[1]) *Comptes rendus*, t. 66, p. 642; *Ann. d. Chem. u. Pharm*, Supplement-Band VI, S. 247.

[2]) Blochmann, *l. c.*, S. 356.

[3]) J'avais en vue cette observation de M. Berthelot, lorsque j'ai parlé ci-dessus de la disparition du pouvoir lumineux de la flamme du gaz de l'éclairage, en cas de mélange avec d'autres gaz.

se dédoublent donc, dit M. Blochmann, en carbone et en hydrogène sous l'action prolongée de la chaleur, car une partie du gaz des marais fournit le carbone dont la présence est nécessaire pour la décomposition de l'acétylène formé. M. Blochmann a aussi trouvé lui-même [1], en faisant passer le gaz de l'éclairage par un tube de porcelaine chauffé à une température inférieure à 1000°, qu'une grande partie des hydrocarbures, surtout des plus denses, se dédouble en hydrogène, en carbone, qui se dépose sur les parois du tube, et en hydrocarbures supérieurs, qui sont volatils à la température du tube, mais solides à la température ordinaire, et qui consistent principalement en naphtaline.

Je crois que ces recherches de M. Berthelot et de M. Blochmann montrent clairement que du carbone doit se dégager dans la flamme et que ce carbone s'y trouve très probablement à l'état solide. Car, quand même ce carbone, comme le veut M. Frankland et comme le concède M. H. Sainte-Claire Deville, ne serait pas entièrement dépouillé d'hydrogène, la quantité d'hydrogène qui lui est associée est certainement trop faible pour que, grâce à elle, ce carbone puisse exister, à la température de la flamme, à l'état de vapeur.

Ce que nous savons aujourd'hui concernant les propriétés des diverses flammes et concernant celles des hydrocarbures à une haute température rend déjà très probable pour moi que le carbone se trouve, au moins en partie, à l'état solide dans la flamme de l'hydrogène carboné, et qu'à cette circonstance est dû le grand pouvoir lumineux de cette flamme. Mais cette probabilité s'élève presque à la certitude par le fait de l'action réfléchissante énergique que la flamme de l'hydrogène carboné exerce sur la lumière et qui la distingue des autres flammes. Les observations que j'ai faites à ce sujet vont maintenant nous occuper.

Dans un Mémoire "Sur les propriétés optiques de la flamme

---

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.* (1874) Bd. 173, SS. 167 u. ff.

des corps en combustion et sur la température du soleil" [1]), M. G. A. Hirn, partisan de l'hypothèse de Davy, émet l'opinion que les particules de carbone, à la haute température qu'elles possèdent dans la flamme, ne réfléchissent plus d'une manière sensible la lumière solaire. Mais cette conclusion repose plutôt sur des bases théoriques, — principalement sur l'absence de polarisation dans la flamme de l'hydrogène carboné, fait dont l'explication sera donnée plus loin, — que sur les observations spécialement faites par M. Hirn. Celles-ci sont en petit nombre et n'ont pas, M. Hirn le reconnaît lui-même, un très grand degré d'exactitude. Aussi son Mémoire, quelque intéressant qu'il soit sous le rapport théorique, ne saurait-il être considéré comme entraînant fortement les convictions dans sa partie expérimentale. Une valeur plus grande doit être attribuée aux recherches de M. J. L. Soret [2]), publiées et même en partie entreprises à l'occasion du Mémoire de M. Hirn. Au début de ces recherches, la réflexion de la lumière solaire, même lorsque celle-ci était concentrée par une lentille, ne put être observée que sur les flammes fuligineuses; dès que les flammes étaient rendues plus brillantes et qu'elles ne fumaient plus, la réflexion semblait s'arrêter complétement. Mais, plus tard, M. Soret remarqua que cela n'avait lieu qu'en apparence, car, en appliquant à la lumière solaire incidente des moyens de concentration plus énergiques, il put constater distinctement la réflexion chez les flammes d'hydrocarbures les plus brillantes. Cette réflexion différait seulement en intensité de celle qui s'opérait sur la fumée surmontant la flamme; dans les deux cas, la lumière réfléchie était totalement polarisée dans le plan des rayons incidents, lorsqu'on l'observait suivant une direction faisant un angle droit avec ces mêmes rayons. La seule circonstance où M. Soret ne put plus distinguer de réflexion, fut celle où il employa du gaz fortement carburé et où il fournit à la flamme une très grande quan-

[1]) *Ann. de Chim. et de Phys.* (4) t. XXX, pp. 319 et suiv.

[2]) *Bibliothèque universelle, Archives des Sciences,* t, XLVIII, pp. 231—241 et t. L, pp. 243—247; *Phil. Mag.* (4), Vol. XLVII, pp. 205—211 et Vol. XLIX, pp. 50—52.

tité d'oxygène. A part les difficultés attachées à l'observation, il croit pouvoir expliquer ce résultat négatif, d'abord par le fait que, la flamme devenant tout à fait blanche et même d'un blanc bleuâtre, il n'y avait plus aucune différence de teinte entre les parties sur lesquelles tombaient les rayons solaires et celles sur lesquelles ils ne tombaient pas, de sorte que la trace du faisceau lumineux ne pouvait se manifester que par une différence d'intensité, difficile à observer; et, en second lieu, par la considération que les particules de carbone étaient consumées presque au moment même de leur formation, et qu'ainsi la matière réfléchissente était relativement beaucoup plus rare. En tenant compte de ce qui a été dit plus haut, je présenterais volontiers cette explication de M. Soret sous la forme suivante. Sur la flamme du gaz fortement carburé et brûlant avec un abondant afflux d'oxygène, on ne voit pas la petite image réfléchie du soleil, d'abord à cause de la faible différence de teinte entre la lumière solaire et la lumière de la flamme, et ensuite parce que la lumière de la flamme est devenue beaucoup plus intense relativement à la lumière réfléchie. En effet, la formation de nouvelles particules de carbone, la vitesse de dissociation des hydrocarbures, a probablement augmenté ici, comparativement à ce qui a lieu pour la flamme ordinaire du gaz, dans une moindre proportion que la vitesse avec laquelle les particules de carbone mises en liberté sont brûlées par l'oxygène, de sorte que le nombre des particules qui se trouvent à un même instant dans la flamme ne s'est pas beaucoup accrû, ou peut-être même a éprouvé une réduction. La quantité de lumière solaire réfléchie aura donc peu augmenté, ou peut-être même aura diminué, tandis que l'intensité lumineuse propre de la flamme est accrue, à cause de la chaleur plus forte, qui détermine une ignition plus vive des particules de carbone.

M. Soret tire de ses expériences la conclusion que le carbone conserve, à des températures très élevées, son pouvoir réflecteur; ensuite, que la théorie de Davy paraît être vraie, au moins pour la température ordinaire de la flamme, attendu qu'un faisceau de lumière solaire est réfléchi par diffusion et polarisé exactement

de la même manière, soit qu'il tombe sur une flamme très brillante ou sur une fumée non lumineuse, fumée dans laquelle la présence de particules de carbone est incontestable.

Il me parut que cette dernière conclusion de M. Soret, à savoir que ses observations confirment la théorie de Davy, ne serait parfaitement légitime que s'il les avait étendues à des flammes dans lesquelles la matière existe certainement à l'état gazeux, et s'il n'avait trouvé alors aucune réflexion. Pour combler cette lacune j'entrepris quelques expériences, qui peu à peu prirent plus de développement. Je commençai par répéter les observations de M. Soret sur des flammes d'hydrocarbures. Au début, lorsque je n'opérais pas encore avec des moyens de concentration très énergiques, je ne réussis à voir distinctement la petite image solaire réfléchie que sur quelques-unes de ces flammes; avec celles qui avaient un certain éclat, l'image était à peine ou pas du tout perceptible. Je résolus donc d'avoir recours à une concentration plus puissante. Le miroir de l'héliostat fournissant un faisceau trop étroit, la lumière solaire, qui durant les observations eut toujours beaucoup d'éclat, fut réfléchie sur un miroir plan ordinaire, mais de très bonne qualité; elle tombait ensuite sur le côté plan d'une lentille plan-convexe, qui, avec une épaisseur de 41 millimètres au centre, avait un diamètre de 190 millimètres. Cette lentille concentrait la lumière en un foyer situé à la distance d'environ 240 millimètres de la face postérieure convexe; c'est à ce foyer qu'étaient placées les flammes qu'on voulait soumettre à l'examen. Ainsi éclairées, toutes les flammes d'hydrocarbures que j'employai se montrèrent réfléchissantes. La flamme du bois d'une allumette chimique, celle d'une bougie stéarique, différentes flammes de gaz (papillon, bec rond à cheminée de verre, brûleur de Bunsen sans afflux spécial d'air, c'est-à-dire avec orifices fermés), la flamme du pétrole avec cheminée de verre, toutes donnèrent une image réfléchie du soleil, très distincte, totalement polarisée, et de couleur bleuâtre par un effet de contraste. L'image était très distincte, soit qu'on la regardât directement, soit qu on l'observât à travers un verre bleu, moyen déjà

employé par M. Soret. Avec la flamme en papillon brûlant sans cheminée et avec la flamme de Bunsen, elle était un peu moins vive, à cause de la grande mobilité et de la variabilité de ces flammes, mais elle n'en était pas moins très visible et très nette. Un effet d'apparence assez singulière est que l'image se distingue le mieux sur les parties les plus lumineuses de la flamme, et disparaît au contraire totalement sur la base obscure, probablement parce qu'à ce niveau les hydrocarbures n'ont pas encore subi de décomposition et sont par conséquent à l'état gazeux, tandis que plus haut, dans la partie éclairante de la flamme, le charbon, devenu libre, se trouve à l'état solide et par suite réfléchit la lumière solaire.

Lorsque, dans le brûleur de Bunsen, on laisse l'air s'introduire par les ouvertures d'en bas, de manière que la flamme, sans doute à cause de la disparition presque immédiate des particules solides de carbone, ne soit plus que faiblement éclairante, cette flamme ne réfléchit nulle part la lumière solaire. Si l'on fait tomber le faisceau lumineux sur le bas de la flamme, il devient tout à fait invisible là où il en traverse l'enveloppe; à l'intérieur de la flamme on peut de nouveau distinguer sa trace, mais son aspect y est absolument le même qu'à l'extérieur de la flamme. De même que, au dehors, le faisceau lumineux est rendu visible par les poussières suspendues dans l'air, de même il est rendu visible à l'intérieur de la flamme par les poussières entraînées avec l'air qui afflue dans le bas du brûleur. Aussi le faisceau lumineux, observé de côté, n'est-il polarisé sensiblement ni en dedans de la flamme, ni en dehors. Cette différence entre la flamme de l'hydrogène carboné et les particules de poussière suspendues dans l'air, — à savoir, que la lumière réfléchie par la première est polarisée totalement ou presque totalement, et que celle réfléchie par les secondes n'est pas polarisée d'une manière appréciable, lorsque le rayon incident et le rayon réfléchi font entre eux un angle droit, — cette différence montre combien la grandeur des particules de carbone dans la flamme est faible par rapport à celle des particules de poussière que l'air tient en suspension.

Les observations de M. Tyndall, sur ses brouillards *actiniques*, ont du reste déjà fait connaître que c'est seulement en cas d'extrême ténuité des particules réfléchissantes que la lumière est polarisée totalement.

J'ai aussi examiné le pouvoir réflecteur de la flamme du mélange d'air et de gaz d'éclairage brûlant dans le bec de Bunsen, après que ce mélange eut traversé, selon la méthode de M. Wibel, un tube de platine chauffé, et que la flamme eut ainsi repris entièrement l'aspect de la flamme éclairante ordinaire du gaz. Entre ces deux espèces de flammes, l'examen ne montra aucune différence sous le rapport en question, preuve nouvelle de la justesse de l'explication que j'ai ci-dessus donnée des observations de M. Wibel.

Sur la flamme de l'hydrogène je ne pus constater aucune réflexion sensible, même lorsque la flamme était très fortement colorée par des vapeurs de lithium, de sodium ou de rubidium; pourtant, s'il y avait eu réflexion, celle-ci aurait dû être beaucoup plus facile à voir, par contraste, sur les flammes à coloration vive que sur les flammes sensiblement blanches des hydrocarbures.

Le soufre et le phosphore, brûlant à l'air, ne présentèrent pas non plus de réflexion. Je fis alors brûler le phosphore, ainsi que l'arsenic, dans l'oxygène. La combustion ne pouvait s'opérer dans un flacon rempli de ce gaz, attendu que la fumée épaisse, qui remplit le flacon presque aussitôt après qu'on a enflammé la matière, eût été trop gênante. Je dirigeai donc, sur des fragments de phosphore ou d'arsenic brûlant à l'air, un courant d'oxygène fourni par un gazomètre; la fumée qui se développe alors n'est pas très agréable aux poumons de l'observateur, mais au moins elle n'empêche pas d'observer l'action de la flamme sur la lumière solaire incidente, vu que la fumée n'entoure pas la flamme, mais s'élève au-dessus d'elle. Ni sur la flamme du phosphore, ni sur celle de l'arsenic, la moindre trace de réflexion ne put être aperçue. Par contre, la fumée qui surmontait ces flammes, et que la lumière du soleil illuminait vivement, montrait d'une manière très distincte la

petite image solaire réfléchie et presque entièrement polarisée.

La fumée qui s'élevait d'une flamme de magnésium réfléchissait aussi la lumière avec force, comme on pouvait s'y attendre; mais, sur la flamme elle-même, je ne crois pas avoir aperçu d'effet. L'observation, toutefois, manquait un peu de certitude en ce cas, parce que la flamme était souvent enveloppée par la fumée, et qu'alors naturellement la petite image solaire reparaissait chaque fois.

L'oxyde de carbone, préparé au moyen du prussiate jaune de potasse et de l'acide sulfurique concentré, puis purifié par son passage sur la chaux sodée et le chlorure de calcium, brûlait avec une belle flamme bleue, sans la moindre réflexion. Aucune action de ce genre ne put être découverte non plus sur les flammes du sulfure de carbone et de l'alcool ordinaire. Ces matières furent brûlées dans une capsule de platine; car, lorsqu'on laissait brûler l'alcool dans une lampe ordinaire à esprit-de-vin, avec mèche, on voyait s'élever continuellement de la mèche des petits nuages de fumée, qui brillaient vivement à la lumière solaire dans l'intérieur de la flamme, et qui étaient probablement formés de particules solides ou liquides entraînées mécaniquement. Le même phénomène se produisait aussi dans la flamme colorée par le lithium. Une mèche d'asbeste, imbibée d'une solution d'un sel de lithium, colorait la flamme de l'hydrogène en rouge. De temps en temps on voyait s'élancer de l'asbeste des petits nuages de fumée, qui avaient beaucoup d'éclat à la lumière du soleil, et qui par conséquent réfléchissaient celle-ci en proportion notable. Lorsqu'un pareil nuage se forme au milieu même de la flamme colorée en rouge de l'hydrogène, il tranche très fortement par sa lumière blanche et brillante sur la couleur beaucoup plus mate de la flamme. Il offre alors l'aspect d'une petite flamme très mince mais assez haute, dont la lumière consiste entièrement en lumière solaire réfléchie, puisqu'elle est totalement polarisée.

D'un côté, nous ne trouvons donc aucune réflexion sensible là où il s'agit uniquement ou du moins principalement de matières à l'état gazeux: flamme de l'hydrogène, naturelle ou colorée par le lithium, le sodium ou le rubidium, flammes du soufre, du

phosphore, de l'arsenic, du magnésium, de l'oxyde de carbone, du sulfure de carbone et de l'alcool ordinaire, flamme de Bunsen avec introduction d'air, base obscure de la flamme des hydrocarbures. De l'autre côté, la réflexion s'observe partout où nous sommes sûrs d'avoir affaire à des matières à l'état solide ou peut-être aussi à l'état liquide: fumées qui s'élèvent des flammes des hydrocarbures, du phosphore, de l'arsenic et du magnésium, petits nuages de fumée qui se forment à l'intérieur des flammes du lithium et de l'alcool. En outre, des phénomènes exactement semblables de réflexion et de polarisation nous sont offerts par les flammes des hydrocarbures, au moins pour ce qui concerne leur partie lumineuse. Ces flammes se rapprochent tout à fait des espaces dans lesquels sont suspendues des particules solides très fines, tandis qu'elles se distinguent nettement des espaces qui ne contiennent que de la matière à l'état gazeux. N'est-il donc pas naturel d'admettre, dans les flammes des hydrocarbures, des espaces tenant en suspension des particules de carbone solides et très petites? Les phénomènes de réflexion, dont il vient d'être question, suffiraient seuls pour donner à cette opinion un haut degré de probabilité; mais nous avons vu que bien d'autres raisons plaident également en sa faveur.

Nous présenterons encore quelques remarques sur quelques-unes des flammes déjà étudiées. En premier lieu, sur celles du phosphore et de l'arsenic brûlant dans l'oxygène. Ces deux flammes ont un grand pouvoir lumineux. Aussi M. Frankland les place-t-il presque sur la même ligne que les flammes éclairantes des hydrocarbures, et leur intensité est une des raisons qui lui ont fait abandonner, même pour ces dernières, l'hypothèse de Davy. Nous venons de voir, toutefois, que les flammes du phosphore et de l'arsenic, bien que semblables aux flammes des hydrocarbures par leur pouvoir éclairant, en diffèrent beaucoup quant à leur nature intime. En effet, elles ne réfléchissent pas d'une manière appréciable la lumière du soleil, ce que fait, au contraire, la flamme de l'hydrogène carboné. Cette différence entre les deux

espèces de flammes se concilie difficilement avec la manière de voir de M. Frankland, tandis qu'elle est en parfaite harmonie avec la nôtre. Dans les flammes de l'arsenic et du phosphore nous n'avons pas de particules solides, nous en avons bien dans la flamme de l'hydrogène carboné; c'est pour cela que le pouvoir réflecteur fait défaut aux premières, non à la dernière.

Un mot maintenant sur les flammes de l'oxyde de carbone et du sulfure de carbone. Ni chez l'une, ni chez l'autre, on ne trouve la moindre trace de réflexion, quoique la présence de particules de carbone dans ces flammes, surtout dans la première, puisse sembler n'être pas tout à fait improbable. On pourrait croire, en effet, que le sulfure de carbone avant d'être brûlé dans la flamme, se dédouble en soufre et en carbone, de même que les hydrocarbures se dédoublent en carbone et en hydrogène. Pour l'oxyde de carbone on pourrait également admettre, avant la combustion, une dissociation totale ou partielle; si peu probable que cela soit à mes yeux, il paraît que la chose n'a pas été jugée impossible par tout le monde. Je ne puis du moins interpréter autrement les paroles suivantes de M. H. Sainte-Claire Deville: ,,J'ai démontré que dans l'oxyde de carbone fortement chauffé il y avait dissociation du gaz avec production d'oxygène et d'un charbon jaune, pulvérulent et léger, auquel est due, suivant toute apparence, la teinte bleue de la flamme''. [1]) Mes observations montrent toutefois que, ni dans la flamme du sulfure de carbone, ni dans celle de l'oxyde de carbone, il n'existe des particules de charbon en quantité appréciable, conclusion à laquelle était déjà arrivé M. Dibbits, par l'étude du spectre de ces flammes [2]). Est-il aussi prouvé par là que le sulfure de carbone, avant d'être brûlé, ne subit dans la flamme aucune dissociation en carbone et en soufre? Pas encore complétement, car il pourrait se faire que la différence entre le sulfure de carbone et les hydrocarbures consistât en ce que la première de ces matières fournirait par sa dissociation du carbone pur, tandis que le charbon produit par les hydrocarbures serait

[1]) *Comptes rendus*, t. LXVII, pp. 1091 et 1092, note.

[2]) Dibbits. *l. c.* SS. 542 u. 543.

encore légèrement hydrogéné; et il serait possible, en outre, que ce charbon hydrogéné se combinât un peu moins facilement avec l'oxygène, et par suite se maintînt un peu plus longtemps à cet état dans la flamme, que le carbone pur. Un très léger excès d'affinité pour l'oxygène, attribué au carbone dur comparativement au charbon contenant de l'hydrogène, suffirait à rendre compte de la différence entre la flamme du sulfure de carbone et celle des hydrocarbures. Peut-être, toutefois, les probabilités sont-elles encore plus grandes en faveur de l'hypothèse avancée par M. Dibbits concernant la combustion du sulfure de carbone, à savoir que, dans la flamme, le soufre de cette substance est d'abord remplacé par l'oxygène, d'où résulte de l'acide carbonique, et qu'ensuite seulement le soufre mis en liberté brûle et se transforme en acide sulfureux.

Jusqu'ici, sauf la flamme de l'hydrogène carboné, nous n'en avons trouvé aucune autre qui offrît la réflexion. En cherchant des flammes chez qui l'on eût quelque chance de rencontrer le pouvoir réflecteur, mon attention se porta sur celles de l'hydrogène arsénié et de l'hydrogène antimonié brûlant à l'air. Avec ces matières, en effet, nous avons dans la flamme une décomposition analogue à celle des hydrocarbures: l'hydrogène arsénié se décompose en arsenic et en hydrogène, l'hydrogène antimonié en antimoine et en hydrogène. Sur l'hydrogène arsénié, toutefois, je fondais peu d'espoir; vu la basse température à laquelle se volatilisent l'arsenic et le produit de sa combustion, l'acide arsénieux, — M. Frankland indique les températures de 180° et de 218°, — il n'était pas probable que ces matières se trouveraient à l'état solide dans la flamme. On pouvait s'y attendre avec plus de raison pour l'hydrogène antimonié, attendu que l'antimoine a besoin d'une température beaucoup plus haute pour se volatiliser. Mes prévisions furent complétement vérifiées par l'expérience.

L'hydrogène arsénié et l'hydrogène antimonié furent obtenus en introduisant une assez grande quantité d'acide arsénieux ou de

tartrate d'antimoine et de potasse dans un appareil où de l'hydrogène était dégagé en abondance par l'action du zinc sur l'acide sulfurique. Souvent, mais pas toujours, l'hydrogène arsénié traversait encore, avant d'être enflammé, des tubes remplis de chaux sodée et de chlorure de calcium, où il se purifiait. Pour l'hydrogène antimonié cette purification ne pouvait naturellement se faire, puisqu'elle aurait amené la décomposition du gaz. Avant d'introduire dans l'appareil la matière arsénicale ou antimonifère, on essayait toujours, quant à son pouvoir réflecteur, la flamme de l'hydrogène dégagé. Ce n'est que lorsque celle-ci ne montrait aucune réflexion, qu'on ajoutait l'acide arsénieux ou le tartre stibié. Cette précaution était absolument nécessaire, car la flamme de l'hydrogène seul montrait souvent à l'intérieur un noyau faiblement réflecteur, et dans ce cas celui-ci se voyait aussi dans la flamme de l'hydrogène arsénié. Lorsque, toutefois, ce noyau manquait dans la première flamme, il était absent aussi de la seconde; quelle que fût l'intensité de la coloration communiquée à celle-ci par l'arsenic, jamais on n'y observait alors la moindre réflexion. Quand le noyau faiblement réflecteur existait, l'hydrogène ou l'hydrogène arsénié dégagés de l'appareil, mais non encore enflammés, présentaient l'aspect d'un brouillard, aspect sûrement dû à des particules mécaniquement entraînées. Ces brouillards, qui ne se montraient pas constamment, étaient difficiles à supprimer; on n'y parvenait pas en faisant passer le gaz dans l'eau, mais bien en lui faisant traverser des tubes remplis de coton cardé. En conséquence, ce dernier moyen fut toujours employé.

Comme je viens de le dire, l'hydrogène arsénié n'offrit jamais de réflexion; chez l'hydrogène antimonié, au contraire, le phénomène se manifesta. La flamme de cette matière présentait un noyau qui réfléchissait fortement la lumière du soleil, en la polarisant aussi de la manière ordinaire, sinon complétement, au moins en grande partie. A l'intérieur de la flamme, vivement colorée, on voyait alors s'élever ordinairement de la base deux petites flammes très brillantes, qui toutefois étaient aussi réunies quelquefois en une seule, et qui plus haut disparaissaient. Il y avait

donc, dans la partie interne de la flamme, de l'antimoine à l'état solide et finement divisé. Là où la réflexion s'observait, la température était plus basse que dans le reste de la flamme; on pouvait s'en assurer à ce que, dans l'intérieur de la flamme, un mince fil de platine était seulement porté au rouge, tandis qu'il était chauffé à blanc dans les autres parties. Indépendamment de ce fait, les phénomènes suivants, observés par moi, rendent aussi extrêmement probable que l'antimoine se trouve dans la flamme à l'état solide là où il y a réflexion, et au contraire sous forme de vapeur là où la réflexion fait défaut. Le tube de dégagement, à l'extrémité duquel le gaz brûlait, était tantôt de verre, tantôt de laiton. Lorsqu'il était en verre, la flamme montrait bien au début le noyau réflecteur, mais seulement pour un instant; très peu de temps après l'inflammation, il n'y avait déjà plus trace de réflexion. Avec le brûleur métallique, au contraire, la réflexion persistait beaucoup plus longtemps; toutefois, elle s'affaiblissait peu à peu, et finissait par disparaître au bout de quelque temps. Cette différence entre le brûleur en verre et le brûleur métallique est facile à expliquer. L'un et l'autre s'échauffent par la flamme, mais tandis que dans le brûleur métallique, bon conducteur de la chaleur, celle-ci se dissipe en grande partie, dans le brûleur en verre elle reste accumulée à la pointe, à cause du faible pouvoir conducteur du verre. Cette pointe s'échauffe donc beaucoup plus fortement et surtout beaucoup plus rapidement chez le brûleur en verre que chez le brûleur métallique; par suite, la base de la flamme atteint aussi, chez le premier, une température plus élevée que chez le second, de sorte que, dans cette partie, l'antimoine ne peut plus rester à l'état solide avec le brûleur en verre, mais bien avec le brûleur métallique [1]). Nous avons donc ici, dans la flamme de l'antimoine, des phénomènes entièrement analogues à ceux qui ont été décrits

---

[1]) Un phénomène analogue a été observé par M. Dibbits (*l. c.*, S. 498). Il a trouvé, en effet, que l'hydrogène, brûlant à l'extrémité d'un tube de verre, donne une flamme qui d'abord est à peine visible, mais qui bientôt se colore en jaune par le sodium que laisse échapper le verre échauffé.

plus haut pour la flamme de Bunsen; seulement, les conséquences de l'élévation de température sont précisément inverses. La preuve que notre explication est juste, dans le cas actuel comme dans celui de la flamme de Bunsen, c'est que, quand le brûleur métallique était chauffé d'avance, la réflexion échappait dès le début à l'observation, bien que la couleur montrât que l'antimoine ne s'était pas déposé dans le tube chauffé, mais brûlait réellement dans la flamme. Lorsque, au contraire, le brûleur métallique était refroidi au moyen d'une couche de neige pendant la combustion de l'hydrogène antimonié, le pouvoir réflecteur conservait pendant toute la durée de l'expérience sa grandeur initiale; avec le brûleur en verre cela n'avait pas lieu, probablement parce que, à cause de la faible conductibilité du verre, la pointe du brûleur s'échauffait fortement, malgré le voisinage de la neige.

J'ai aussi appliqué le refroidissement du brûleur métallique à la flamme de l'hydrogène arsénié, non-seulement en employant la neige, mais même en faisant usage d'un mélange réfrigérant de neige et de sel ammoniac. Quoique la base de la flamme fût alors assez refroidie pour qu'un fil de platine y rougît à peine, aucune réflexion ne se manifesta; selon toute apparence, parce que la température était encore trop élevée pour permettre à l'arsenic de conserver l'état solide, peut-être aussi, bien que cela paraisse moins probable, parce que la température de décomposition de l'hydrogène arsénié, laquelle m'est inconnue, est plus élevée que celle à laquelle l'arsenic se volatilise.

Les phénomènes offerts par l'hydrogène arsénié et l'hydrogène antimonié confirment, je crois, cette conclusion: que les flammes, dans lesquelles la matière n'existe qu'à l'état de vapeur, ne possédent pas de pouvoir réflecteur sensible, au moins pour le degré de concentration des rayons solaires employé dans mes expériences; que les flammes, au contraire, où la matière se trouve à l'état solide, et peut-être aussi celles ou elle affecte l'état liquide, présentent un pouvoir réflecteur assez fort; que par conséquent, dans les flammes éclairantes des hydrocarbures, le carbone existe à l'état solide.

Il ne me reste plus qu'à dire un mot de quelques phénomènes qui, au jugement de plusieurs, semblent en contradiction avec la théorie de Davy. D'abord, la grande transparence de la flamme. C'est sans doute à raison de ce phénomène que M. Frankland [1]) attribue, aux hydrocarbures gazeux qu'il suppose exister dans la flamme, la propriété d'être *transparents*. Cette transparence, toutefois, n'est pas aussi absolue qu'on le pensait généralement. On croyait, par exemple, qu'une flamme de gaz plate émettait, dans les directions situées dans le plan de la flamme, exactement autant de lumière que dans les directions perpendiculaires à ce plan; que, par conséquent, la flamme était parfaitement transparente pour sa propre lumière. Il résulte toutefois des expériences de M. Hirn [2]) que cela n'est pas entièrement exact; une grande flamme très plate ne donne pas une lumière égale dans tous les sens; la différence n'est ordinairement pas grande, mais peut pourtant atteindre quelquefois le cinquième de l'intensité totale. En plaçant l'une derrière l'autre un certain nombre de flammes de pétrole, M. Hirn a trouvé que celles-ci non plus ne sont pas absolument transparentes; à la suite du passage de la lumière d'une de ces flammes à travers les autres, on observe une diminution sensible de l'intensité lumineuse [3]). M. Hirn a aussi fait des expériences sur les ombres que les flammes peuvent porter, lorsqu'elles sont placées, par exemple, dans une lumière solaire très vive. La plupart des expériences relatives à la transparence des flammes sont entachées, toutefois, d'une source d'inexactitude, en ce que la lumière, lors de son passage à travers une flamme, n'est pas seulement modifiée par l'absorption dans cette flamme, mais aussi par la réfraction et la dispersion qu'elle subit tant dans la flamme elle-même que dans les couches gazeuses

---

[1]) Voir ci-dessus, p.

[2]) Hirn, *l. c.*, p. 237.

[3]) Les observations de M. Allard (*Comptes rendus*, t. LXXXI, p. 1096, 6 déc. 1875), dont je n'ai eu connaissance que pendant l'impression du présent travail (publié d'abord en hollandais), prouvent aussi que la flamme n'est pas complétement transparente, mais possède un pouvoir absorbant très appréciable.

raréfiées qui entourent le corps de la flamme. Aussi, tout en admettant que les flammes des hydrocarbures ne sont pas complétement transparentes, on doit reconnaître que leur transparence est grande, certainement beaucoup plus grande que celle de la fumée qui les surmonte. Cela n'a d'ailleurs rien d'extraordinaire; on peut l'expliquer, ou bien en supposant, comme le fait M. Soret pour d'autres raisons, que les particules charbonneuses solides et incandescentes ne se trouvent que dans une enveloppe extrêmement mince qui entoure la flamme, ou bien en regardant le volume des particules charbonneuses, — dont l'excessive ténuité est mise hors de doute par la polarisation totale de la lumière qu'elles réfléchissent, — comme très petit comparativement aux espaces qui séparent ces particules. Il me paraît donc tout à fait inutile, pour rendre compte de la grande transparence de la flamme, d'admettre, avec M. Hirn, que les particules charbonneuses perdent entièrement leur pouvoir absorbant à une haute température; cette supposition, d'après la remarque très juste de M. Soret, serait en outre contraire au principe de la proportionnalité entre le pouvoir absorbant et le pouvoir émissif des corps.

Pour ce qui concerne; enfin, le manque total de polarisation dans la lumière de la flamme, ce fait n'est nullement incompatible, comme le croit M. Hirn, avec l'attribution du pouvoir réflecteur aux particules charbonneuses que la flamme contient. Les particules situées sur une petite étendue de la surface de la flamme réfléchissent, il est vrai, la lumière d'autres particules charbonneuses, mais celles-ci sont distribuées dans tous les sens autour des particules réfléchissantes. Cette lumière avait donc, avant d'être réfléchie, toutes sortes de directions, et il n'y a par conséquent aucune raison pour qu'après la réflexion elle soit polarisée dans un plan plutôt que dans un autre. L'absence de pouvoir réflecteur n'est donc nullement nécessaire pour expliquer l'absence de polarisation dans la lumière de la flamme; après les expériences de M. Soret et les miennes, la réalité de ce pouvoir réflecteur ne saurait plus être contestée.

L'INFLUENCE DU SPASME BRONCHIQUE

SUR LA RESPIRATION,

PAR

Th. H. MAC GILLAVRY.

Dans le cahier de septembre 1876 de l'*Archiv für die gesammte Physiologie* de Pflüger, le Dr. Leo Gerlach, d'Erlangen, a publié de nouvelles recherches sur: ,,Les rapports entre les nerfs vagues et les fibres musculaires lisses du poumon''. L'intérêt que cette question offre pour la pathologie est signalé par l'auteur comme une des causes principales qui la font remettre si fréquemment à l'étude. Il remarque avec raison qu'une théorie, qui se propose de rendre compte des phénomènes de l'asthme bronchique (asthme nerveux), aura d'autant plus de valeur qu'elle s'accordera mieux avec les résultats de l'expérimentation physiologique. Il s'abstient toutefois avec soin de prendre parti pour l'une ou l'autre des théories émises.

Le travail de M. Gerlach me donna envie de relire ce qui a été écrit sur la nature de l'asthme nerveux, et bientôt je me décidai à entreprendre quelques recherches expérimentales, dont je vais communiquer les résultats. Je demande toutefois la permission de rattacher à cet exposé certaines considérations, qui ne me paraissent par absolument dépourvues d'intérêt pour les physiologistes et les médecins.

Lorsque dans la trachée d'un cadavre on fixe hermétiquement un manomètre, et qu'on ouvre ensuite la cavité thoracique, le liquide s'élève dans le manomètre (6 mm. de mercure chez l'homme, d'après M. Donders). Cette différence de pression mesure par conséquent la réaction élastique du tissu pulmonaire après l'expiration la plus forte possible. Si l'opération est faite sur un animal vivant, on observe également l'ascension du liquide manométrique. Ce liquide, toutefois, exécute alors des oscillations, produites par des mouvements respiratoires violents, qui, même quand la cage thoracique est ouverte, font varier notablement la tension de l'air emprisonné dans les poumons. Si ensuite les poumons, y compris les nerfs vagues, sont extraits du corps, le manomètre devient stationnaire, indiquant une différence de pression de quelques millimètres de mercure. L'excitation électrique de l'un des nerfs vagues, ou de tous les deux, détermine alors une ascension du liquide dans le manomètre, ascension qui peut atteindre 5 mm. d'eau chez le lapin, 8 chez le chien (Voir le cahier, ci-dessus cité, de l'*Archiv* de Pflüger). Cette expérience met hors de doute que le volume de l'air emprisonné diminue; quant à savoir si elle est concluante pour l'une ou l'autre théorie de l'asthme, c'est ce qui demandera un examen spécial.

Tout d'abord elle nous montre que la diminution de la capacité pulmonaire, obtenue par l'excitation des nerfs vagues, est très petite, savoir environ 0,0005 du volume primitif [1]).

On peut maintenant admettre:

ou bien, que la contraction des muscles se fait avec si peu de force qu'une pression de 5 mm. d'eau empêche toute contraction ultérieure (de même que la contraction d'un muscle long, mais grêle, ne peut imprimer au point d'insertion mobile un déplacement considérable, à moins que la résistance à vaincre ne soit faible).

---

[1]) $V' = \frac{D}{D'} \times V = \frac{760 \times 13{,}5}{760 \times 13{,}5 + 5} \times V = 0{,}99951 \ldots \times V;$

donc: $V - V' = 0{,}00049 \ldots \times V.$

ou bien, que les espaces qui se resserrent par suite de la contraction musculaire sont très petits comparés au volume total (condition analogue à celle d'un muscle épais et court, qui, tout en se contractant avec beaucoup de force, ne déplace que peu le point d'insertion mobile).

En admettant la première de ces hypothèses, on pourrait être conduit à penser, avec M. Wintrich, que les forces musculaires des ramuscules bronchiques sont tout à fait incapables de lutter contre les forces qui entrent en jeu dans les mouvements respiratoires ordinaires. Je me garderai bien, toutefois, de me prononcer à cet égard, et ferai remarquer qu'on court toujours risque d'arriver à des conclusions erronées lorsqu'on traite un problème dynamique comme si c'était un problème statique. Ce qui résulte avec certitude de pareilles expériences, c'est que l'excitation des nerfs vagues diminue d'une quantité extrêmement petite le volume des poumons. En faisant intervenir cette donnée dans une théorie de l'asthme nerveux, on s'expose à comparer des grandeurs qui de leur nature ne sont pas comparables. Il s'agit de savoir, en effet, pourquoi dans cette affection l'air pénètre plus difficilement que d'ordinaire dans les culs-de-sac pulmonaires, et surtout pourquoi l'expiration de l'air est encore plus difficile que l'inspiration.

Or la diminution de volume, qui est la suite de l'excitation des nerfs vagues, pourrait atteindre des proportions énormes, sans qu'elle fût capable de produire les phénomènes caractéristiques de l'asthme; réciproquement, la diminution de volume peut être très petite et n'en avoir pas moins pour effet d'entraver complétement la respiration. Si, par exemple, les parois des culs-de-sac aériens étaient pourvues de fibres musculaires, la contraction de ces parois réduirait considérablement le volume des poumons enlevés du corps et encore plus ou moins gonflés Lors de l'inspiration, de pareils poumons nécessiteraient des efforts plus considérables de la part des muscles inspirateurs; lors de l'expiration, l'air serait expulsé plus rapidement, et par suite la durée de l'expiration se trouverait abrégée. Si, au contraire, les muscles pulmonaires n'existaient que dans les dernières ramifications bron-

chiques, qui ne possèdent plus de squelette cartilagineux, et s'ils y étaient condensés en sphincters, leur contraction pourrait déterminer l'occlusion complète de ces ramuscules bronchiques, faire ainsi entièrement obstacle au cours de l'air, et ne produire, dans l'expérience avec le manomètre, sous l'influence de l'excitation des nerfs vagues, qu'une diminution insignifiante du volume des poumons.

Les questions principales, qui intéressent le physiologiste aussi bien que le médecin, sont celles-ci:

La contraction des muscles des ramuscules bronchiques occasionne-t-elle le resserrement de ces ramuscules?

Ce resserrement est-il assez considérable pour gêner le mouvement de l'air dans la respiration?

Ce resserrement est-il effacé en partie, ou au contraire augmenté, par l'action des muscles inspirateurs et expirateurs?

Il est évident que l'expérience seule peut fournir la réponse à ces questions. Si l'on consulte les faits expérimentaux déjà connus, on trouve, comme résultat concordant des recherches d'un grand nombre d'observateurs, que l'excitation des nerfs vagues rétrécit le calibre intérieur des rameaux bronchiques coupés transversalement. Mais si l'on demande quelle influence ce rétrécissement exerce sur le mouvement de l'air dans la respiration, on reconnaît que les données quantitatives font défaut. Or, personne ne contestera qu'il ne suffit pas de savoir que les rameaux bronchiques se resserrent à la suite de l'excitation des nerfs vagues, mais qu'il faut aussi pouvoir indiquer approximativement de combien est augmentée, par l'effet de ce resserrement, la résistance que l'air éprouve dans son mouvemement. Je rappelle ici, en passant, que l'existence de fibres musculaires a été constatée dans la trachée et dans toutes ses ramifications, même les plus déliées; que des fibres musculaires ont aussi été trouvées dans les cloisons qui séparent les culs-de-sac aériens, en tant que ces cloisons peuvent être considérées comme le prolongement direct des parois des ramuscules bronchiques; mais que les parois des culs-de-sac ne possèdent pas de muscles, en dépit de quelques assertions, qui

ont été contredites itérativement et d'une façon catégorique par d'excellents observateurs.

Le problème qui nous occupe est dominé, comme on le voit, par la question de savoir s'il est possible de disposer une expérience de telle sorte que, l'air parcourant les voies aériennes, on puisse mesurer les résistances qu'il rencontre, et en même temps examiner si l'excitation des nerfs vagues augmente ces résistances. Ainsi posé, le problème est susceptible de solution expérimentale; voici de quelle manière.

Pour obtenir un afflux régulier d'air, on prend un flacon d'assez grande capacité (celui que j'ai employé mesurait 7 à 8 litres). Ce flacon est fermé hermétiquement au moyen d'un bouchon percé de deux ouvertures. Dans ces ouvertures sont fixés des tubes de verre, qui se terminent tous les deux à la face inférieure du bouchon. Un de ces tubes est uni à un tuyau en caoutchouc, qui amène l'eau d'un réservoir. L'autre tube laisse alors passer, dans l'unité de temps, un volume d'air égal au volume d'eau qui tombe dans le flacon pendant cette même unité de temps. Ce second tube sera relié plus tard, à l'aide d'un second tuyau en caoutchouc, à une canule fixée dans la trachée d'un animal vivant (lapin). Si l'on se figure en outre le second tuyau de caoutchouc pourvu d'un tube latéral, qui communique avec un manomètre rempli d'eau, on aura une idée complète de l'appareil. Après s'être assuré que celui-ci ferme bien, on ouvre par devant, dans le plan médian, la cavité thoracique de l'animal destiné à l'expérience, et on fait avec les doigts une déchirure aux sacs pleuraux. Le tuyau en caoutchouc est alors relié aussi rapidement que possible à la canule introduite dans la trachée, puis on laisse couler l'eau dans le flacon gazométrique. L'air chassé par l'eau gonfle le poumon, qui s'était affaissé au moment de l'ouverture de la cavité thoracique, et en même temps on voit l'eau s'élever dans la branche ouverte du manomètre. Pour obtenir un courant d'air régulier, on pratique de petits trous dans la surface accessible du poumon, en se servant pour cela d'une fine aiguille à coudre, piquée à travers un bouchon de manière

que sa pointe ne fasse qu'une saillie de 2 à 3 millimètres. L'air contenu dans le poumon s'échappe par les petits trous avec une faible crépitation, la colonne liquide du manomètre éprouve une dépression et s'arrête bientôt à une hauteur déterminée. Si le poumon a été percé d'un nombre de trous suffisant, l'action du cœur se ranime et l'animal reste couché tranquillement. Le moment est maintenant venu d'exciter par des courants d'induction (appareil de M. du Bois-Reymond, sans noyau de fer, bobines entièrement séparées l'une de l'autre) le bout périphérique de l'un ou des deux nerfs vagues préalablement coupés. Peu d'instants après le commencement de l'excitation, on voit l'eau s'élever dans le manomètre. Mais le pronostic favorable qu'on en tire ne se réalise pas. Bientôt l'eau du manomètre se montre agitée de violentes oscillations, évidemment dues à des mouvements respiratoires convulsifs. Lorsque, en effet, la cavité thoracique est ouverte par devant dans le plan médian, et que les poumons sont plus ou moins gonflés, ceux-ci reposent encore dans une grande étendue sur la paroi de la poitrine et sur le diaphragme. Si des mouvements inspirateurs et expirateurs violents se produisent, les poumons suivent aussi bien la paroi thoracique que le diaphragme dans leurs déplacements, et le volume des poumons est alternativement augmenté et diminué, d'où résultent des oscillations imprimées au liquide du manomètre. L'animal souffre de dyspnée, ce qui doit être mis sur le compte des longues pauses diastoliques du cœur.

Le résultat de l'expérience n'est pourtant pas entièrement négatif, puisqu'on a vu, avant que la dyspnée se produisît, l'eau monter régulièrement dans le manomètre. Cette ascension mérite une attention particulière; elle prouve que l'air qui parcourt les poumons éprouve une grande résistance quand on excite les nerfs vagues, résistance qui ne peut guère être attribuée qu'au rétrécissement des voies parcourues, suite d'une contraction musculaire.

En disposant l'expérience comme nous allons le dire, on évite les influences pertubatrices dont il vient d'être question.

Les deux nerfs vagues d'un lapin sont isolés dans la région du

cou, et sous chacun d'eux on passe un fil de soie; la canule est fixée dans la trachée, la cavité abdominale ouverte, l'œsophage lié en deux points et sectionné entre les deux ligatures. Aussi rapidement que possible on coupe alors successivement la veine cave postérieure et l'aorte, et on étanche le sang au moyen d'une éponge. Après avoir ouvert la cavité thoracique, on enlève le diaphragme et on repousse au dehors les parois latérales de la cage thoracique, en partie en désarticulant les côtes, en partie en les cassant. Lorsque la canule de la trachée est ensuite reliée au gazomètre, les poumons se gonflent régulièrement. Pour éviter de léser les gros canaux bronchiques, on se contente de piquer des trous dans la partie de la surface du poumon qui était originairement en contact avec le diaphragme. La colonne d'eau du manomètre s'abaisse et finit par s'arrêter à une différence de pression de 68 mm. Après que les nerfs vagues ont été liés, on les coupe au-dessus de la ligature et on excite le nerf vague de droite (appareil de M. du Bois-Reymond, sans noyau de fer, bobines entièrement séparées l'une de l'autre). Le manomètre remonte lentement jusqu'à 75 mm. Les électrodes sont alors appliquées sur le pneugmogastrique gauche; le manomètre monte beaucoup plus rapidement et s'élève jusqu'à 120 mm. Le liquide se maintient quelque temps à ce niveau, puis, quand l'excitation a cessé, descend lentement jusqu'à 70 mm. Immédiatement on excite de nouveau le nerf vague gauche: ascension jusqu'à 100 mm. Après abaissement jusqu'à 70 mm., excitation du nerf vague droit: ascension jusqu'à 85 mm. Excitation des deux nerfs à la fois, les bobines se recouvrant en partie: aucun résultat. Excitation avec bobines se recouvrant entièrement et avec noyau de fer: aucun résultat.

Le décroissement rapide de l'excitabilité des organes exsangues et mourants ne surprendra personne.

Cette expérience montre à toute évidence que l'excitation des nerfs vagues augmente considérablement la résistance dans les voies aériennes, puisque la pression latérale, qui est la mesure de cette résistance, s'est accrue de 52 mm. d'eau, c'est-à-dire, d'environ 4 mm. de mercure.

Ce résultat faisait espérer qu'on obtiendrait des différences de pression encore plus fortes, s'il était possible d'amener les poumons dans l'état qui vient d'être décrit, sans que la circulation sanguine fût interrompue. Mes tentatives en ce sens ont échoué toutefois, et cela parce qu'une circonstance imprévue exerçait une action perturbatrice. Le cou d'un lapin ayant été préparé comme dans l'expérience précédente, la cavité abdominale fut ouverte, l'œsophage coupé entre deux ligatures (la veine cave et l'aorte laissées intactes). Ouverture de la cage thoracique; diaphragme enlevé à l'aide de ciseaux et des doigts; parois latérales de la poitrine rejetées en dehors par fracture et désarticulation des côtes; perte de sang très faible, ne dépassant par celle d'une incision cutanée dans le plan médian. La communication étant établie entre la canule de la trachée et le gazomètre, l'eau est mise en mouvement et la surface inférieure du poumon est piquée.

Il est clair qu'on doit opérer en grande hâte, vu que l'animal est en proie à la dyspnée la plus violente et que le cœur menace de s'arrêter tout de bon. Pour parer à ce danger, on est obligé de cribler rapidement le poumon de piqûres, mais alors ces trous multipliés et faits avec précipitation font perdre l'avantage qu'on espérait obtenir. Aussi le résultat de l'excitation des nerfs vagues a-t-il été, dans toutes les expériences de ce genre, moins satisfaisant que lorsque les poumons étaient vides de sang. Le maximum de la différence de pression était de 30 mm. d'eau.

Je dois encore faire remarquer que les différences de pression se manifestent tout aussi bien quand les électrodes sont appliquées directement sur les poumons, et que le nerf vague gauche a donné assez constamment un effet plus marqué que le nerf droit.

Une autre expérience mérite encore d'être signalée, parce qu'elle prouve que l'augmentation de résistance, produite par l'excitation électrique, est la conséquence d'une action nerveuse et musculaire. Le lapin était préparé comme il vient d'être dit, mais dans le circuit du tuyau en caoutchouc, qui reliait le gazomètre à la canule de la trachée, on avait intercalé un appareil particulier, consistant en un petit flacon bien fermé. Le bouchon de ce flacon était

traversé par trois tubes de verre: le n° 1 amenait l'air que la pression chassait du gazomètre, le n° 2 communiquait avec la canule, le n° 3 était assez long, pourvu d'un robinet en verre, et terminé supérieurement par un entonnoir contenant de l'ammoniaque liquide. Les choses ainsi disposées, et l'air traversant les poumons, si on ouvrait le robinet, quelques gouttes de liquide tombaient au fond du flacon et l'air envoyé aux poumons se chargeait de vapeurs d'ammoniaque. On sait que cette substance, à condition de ne pas être trop diluée, tue les nerfs et les muscles avec une telle rapidité que la période d'excitation ne peut être observée. Aussi l'air chargé d'ammoniaque ne donnait-il lieu, en traversant les poumons, à aucune ascension de la colonne manométrique. Il suffisait ensuite d'enlever rapidement l'appareil à ammoniaque et de mettre le tube à air du gazomètre en rapport direct avec la canule de la trachée, pour que les poumons fussent de nouveau parcourus par de l'air atmosphérique ordinaire.

L'excitation des nerfs vagues par des courants d'induction, forts ou faibles, ne produisait alors plus aucun effet.

De ce qui précède, on peut conclure sans hésitation:

1°. Que l'excitation des nerfs vagues resserre les ramuscules bronchiques au moyen d'une contraction musculaire.

2°. Que, par suite de ce resserrement, le courant d'air éprouve une résistance considérable.

La réponse est ainsi donnée à nos deux premières questions.

En passant maintenant à la troisième question, il peut être utile de nous rappeler d'abord le mécanisme de la respiration ordinaire et calme. Lors de l'inspiration le diaphragme s'abaisse, ce qui agrandit la dimension longitudinale de la cavité thoracique; les autres inspirateurs soulèvent les côtes, d'où agrandissement de la section transversale de cette cavité. Les poumons suivent exactement les parois de la poitrine, l'air contenu dans ces organes augmente en volume et, suivant le même rapport, diminue en tension. Si, chez l'homme ou chez l'animal, on mesure, dans le nez ou dans la trachée, la différence de pression qui existe lors de l'inspiration, on trouve que cette différence est très petite, de 1 mm. de mer-

cure environ. Lorsque les muscles inspirateurs se reposent, le diaphragme et la cage thoracique reviennent à leur état d'équilibre. Dans la respiration calme ordinaire, ce retour s'effectue sans aucune aide sensible des muscles expirateurs. Les culs-de-sac aériens des poumons peuvent alors se débarrasser, par la réaction élastique de leurs parois d'abord dilatées, d'une partie de leur contenu, qui s'échappe à travers les canalicules bronchiques. Pour cet effet, aucune pression sur la surface des poumons ne paraît être nécessaire. La différence de pression, sous laquelle l'air se meut dans l'expiration ordinaire, s'élève, mesurée dans la trachée ou dans le nez, à environ 4 mm. de mercure. Quant aux différences de pression qui existent, lors de l'inspiration ou de l'expiration, entre l'atmosphère et l'air contenu dans les culs-de-sac des poumons, elles n'ont pu être mesurées jusqu'ici. On peut admettre, toutefois, qu'elles sont un peu plus grandes que celles dont il vient d'être question.

Il est naturel de croire que les différences de pression qui se produisent dans la respiration calme ordinaire sont des grandeurs du même ordre que l'augmentation de pression latérale obtenue expérimentalement par l'excitation des nerfs vagues. Si donc, n'importe d'ailleurs par quelle cause, les muscles des canalicules bronchiques sont contractés spasmodiquement, les différences de pression ordinaires ne seront pas capables d'accomplir l'inspiration et l'expiration dans le même temps qu'auparavant. Dans le premier de ces actes, un plus grand effort sera alors instinctivement imposé aux muscles inspirateurs, c'est-à-dire que la cage thoracique s'élargira davantage, que l'air des poumons augmentera de volume et pressera proportionnellement moins. Ce sont les culs-de-sac aériens et les ramuscules bronchiques dépourvus de squelette cartilagineux qui par leur dilatation agrandissent le volume des poumons. Quant aux ramuscules, on ne saurait affirmer qu'ils soient capables de cette action pendant la durée de l'accès spasmodique. Je le regarde toutefois comme probable, parce que la dilatation des culs-de-sac aériens doit encore aider à celle des canalicules bronchiques adjacents. Si le diamètre du canalicule

est M en l'absence de tout spasme musculaire et M — K dans la période de spasme, ce diamètre deviendra M — K + U lorsque la cage thoracique se dilatera avec énergie. En d'autres termes: la contraction spasmodique des ramuscules bronchiques est neutralisée, pour une très petite partie, durant l'inspiration.

Lors de l'expiration, c'est tout le contraire. A mesure que la cage thoracique s'affaisse, les forces élastiques des culs-de-sac aériens entrent en jeu. En cas de spasme, l'air expulsé éprouve une plus grande résistanee que de coutume, et par suite l'expiration dure plus longtemps. Instinctivement les muscles expirateurs sont alors appelés en aide. Par leur action, la cage thoracique et les poumons sont comprimés, le volume des poumons diminue. Cette diminution du volume des poumons est évidemment le résultat de la diminution de volume des cavités aériennes dont les parois ne possèdent pas assez de solidité pour résister à l'action des expirateurs. Parmi ces cavités, je crois qu'il faut compter les dernières ramifications bronchiques. Le diamètre de ces ramuscules les plus fins sera maintenant M — K — S, si S désigne la réduction que le diamètre subit par suite de la compression. La différence des diamètres des ramuscules bronchiques les plus déliés, en passant de l'inspiration à l'expiration, sera donc représentée, durant l'accès de spasme, par U + S, et la différence des sections transversales de ces ramuscules, abstraction faite de grandeurs d'ordre inférieur, par $\pi\,(M - K) \times \frac{U + S}{2}$.

Ce qui précède nous amène à conclure que la gêne apportée à la circulation de l'air se fait sentir plus faiblement pendant l'inspiration, plus fortement pendant l'expiration. En supposant un pommon qui expire au début du spasme, nous avons à regarder la durée de l'expiration comme prolongée. Avant que le poumon se soit suffiçamment vidé, commence l'inspiration. Le surplus anormal du contenu pulmonaire au début de l'inspiration est peu de chose après une expiration unique, mais augmente à chaque expiration suivante, jusqu'à ce qu'un nouvel état d'équilibre soit atteint, dans lequel l'air comprimé compense, par sa

densité et sa vitesse plus grandes, la diminution du volume qui peut s'écouler. L'air qui reste dans les poumons est toujours très chargé d'acide carbonique; si sa quantité absolue augmente, la quantité absolue d'air frais qui peut être introduite par l'inspiration diminue. Le résultat sera que la ventilation des poumons deviendra imparfaite et l'oxygénation du sang insuffisante; bref, que la dyspnée se déclarera et que le diaphragme, pendant l'inspiration, devra s'abaisser plus que dans l'état normal.

On demandera peut-être si je veux donner à ces considérations la valeur d'une théorie de l'asthme? Telle n'est pas mon intention. Appuyé sur une base expérimentale, j'ai cherché à reconnaître ce qui doit arriver dans l'inspiration et l'expiration lorsque les ramuscules bronchiques sont contractés spasmodiquement. Quant à la question de savoir si ces observations fournissent des arguments pour ou contre l'une des théories courantes de l'asthme, j'en laisse la solution à ceux qui ont eu l'occasion d'étudier des cas nombreux de cette affection. J'espère toutefois qu'on ne m'opposera pas le: *ne sutor ultra crepidam*, si j'exprime la conviction que toute théorie de l'asthme devra tenir compte de ce qui a été constaté au sujet de l'état de réplétion des vaisseaux sanguins durant l'accès. Que des spasmes toniques puissent se produire sans hypérémie, c'est ce qui me paraît peu probable.

UTRECHT, Octobre 1876.

L'INFLUENCE

DE LA

PRESSION SUR LA TEMPÉRATURE DU MAXIMUM DE DENSITÉ DE L'EAU,

PAR

J. D. VAN DER WAALS.

---

1. La température à laquelle l'eau possède sa plus grande densité n'est connue, que je sache, que pour le cas où ce liquide se trouve sous la pression d'une atmosphère. On peut se demander: l'eau présente-t-elle aussi un maximum de densité sous d'autres pressions, et la température à laquelle cela a lieu est-elle la même que sous la pression ordinaire? Et si la question n'a pas encore été l'objet d'une étude directe, peut-on en déduire la solution d'observations faites à un autre point de vue? Je vais essayer de montrer que la connaissance des coefficients de compressibilité de l'eau, à des températures voisines de celles du maximum de densité, nous permet d'arriver au but proposé; nous verrons que la température du maximum de densité diminue à mesure que la pression augmente, et que cette dépendance se laisse exprimer par une formule, dans la supposition que les coefficients de compressibilité soient déterminés avec une exactitude suffisante par les expériences de M. Grassi (*Ann. de chimie et de physique*, Sér. III, t. 31).

2. Avant tout, il faut donner une idée de la manière dont j'ai cherché à résoudre la question.

En supposant, sous la pression ordinaire, le maximum de densité à 4°, on sait qu'à des températures très peu inférieures à 4° le volume ne surpasse que de très peu celui qui correspond à 4°. Si à cette température inférieure, par exemple à 3°,5, le coefficient de compressibilité est plus grand qu'à 4°, ainsi qu'il résulte des expériences de M. Grassi, le volume peut être rendu le même dans les deux cas par une augmentation de pression. Sous la pression convenable, l'eau a alors le même volume à 4° et à 3°,5, et la température du maximum de densité est par conséquent intermédiaire entre ces deux températures. Toutefois, la justesse de cette conclusion n'est inattaquable que dans le cas où la pression, nécessaire pour obtenir l'égalité des deux volumes, tombe entre les limites de l'expérience par laquelle ces coefficients de compressibilité ont été déterminés. Or, si à priori on n'est pas assuré que cette condition soit remplie lorsque la seconde température diffère beaucoup de 4°, la différence peut être prise si petite que cette certitude soit parfaitement acquise. Soient, en effet, Δt la différence de température, et $f(t)$ le volume sous la pression d'une atmosphère, le volume à la température $t - \Delta t$ sera représenté par

$$f(t - \Delta t) = f(t) - f'(t) \Delta t + \frac{f'' t}{12} \Delta t^2 \text{ etc.}$$

Si t est la température du maximum de densité, on a $f'(t) = 0$, et par conséquent le volume est augmenté de $\frac{f''(t)}{1.2} \Delta t^2$ etc.

Désignons maintenant par $\varphi(t)$ les coefficients de compressibilité sous la pression de une atmosphère; à $t - \Delta t$ ce coefficient sera égal à

$$\varphi(t) - \varphi'(t) \Delta t + \text{etc.}$$

Sous une augmentation de pression de p atmosphères, le premier volume est donc

$$f(t) \{1 - p . \varphi(t)\}$$

et le second

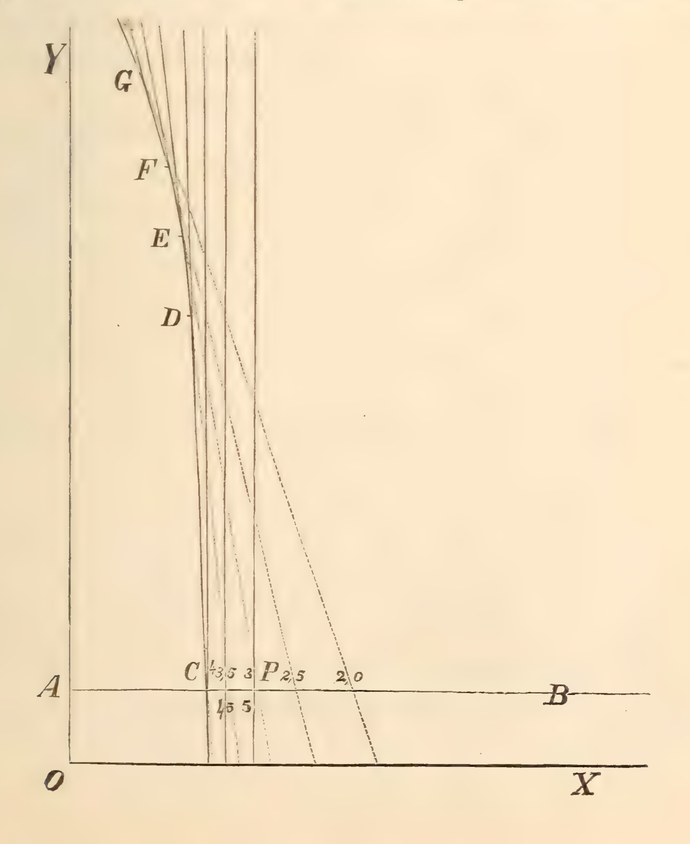
$$\left\{ f(t) + f'(t)\,\frac{(\Delta t)^2}{1.2} \right\} \left\{ 1 - p\,[\varphi(t) - \varphi(t)\,\Delta t] \right\}.$$

Pour qu'ils soient égaux, on doit avoir

$$p = -\frac{\Delta t}{1.2}\,\frac{f''(t)}{f(t)\,\varphi'(t)}.$$

Ce résultat montre que Δt peut être pris si petit que p tombe certainement entre les limites des observations qui ont fourni les coefficients de compressibilité. Comme $\varphi(t)$ est au voisinage de 4° une fonction décroissante, $\varphi'(t)$ sera négative et par conséquent p positive. Il est facile de voir que, dans le cas seul où la compressibilité présenterait, elle aussi, une valeur maximum à 4°, le résultat trouvé ne serait plus applicable.

3. Des considérations géométriques peuvent servir à élucider ce qui vient d'être dit et à montrer que, même si l'on ne



connaissait pas les résultats obtenus par M. Grassi, on aurait droit de s'attendre à ce que les coefficients de compressibilité dussent être différents, si l'eau, à pression égale mais à température différente, occupe un même volume.

Les observations concernant le volume que l'eau occupe sous l'unité de pression à des températures diverses déterminent chacune, en effet, un point de l'isotherme relative à une certaine température. Ces points sont situés sur une droite A B parallèle à l'axe des abscisses. Le point C, qui correspond à l'eau à 4°, est le plus rapproché de l'origine. Tous les autres points P appartiennent à deux isothermes différentes. A moins de supposer maintenant que deux pareilles isothermes coïncident dans toute leur étendue, on est obligé d'admettre qu'elles se coupent au point commun; le contact peut se présenter comme cas exceptionnel. Or cette supposition d'une coïncidence complète ne saurait être accueillie, si l'on réfléchit que, au moins pour les grands volumes (volumes des vapeurs), les isothermes relatives aux deux températures sont des lignes tout à fait différentes.

Chacun des points en question peut donc être regardé comme un point double, par lequel passent deux lignes qui ont, en général, des directions différentes. Et si la direction de ces lignes est différente, le coefficient de compressibilité est naturellement différent aussi. Le coefficient angulaire de la tangente à l'isotherme est, en effet, égal à $\frac{1}{-v\beta}$, si v désigne le volume et β le coefficient de compressibilité.

4. Puisque les lignes isothermiques sont des relations de la forme

$$\varphi(p, v, t) = 0,$$

nous pouvons les considérer comme formant un même groupe, dont les membres ne diffèrent entre eux que par la variation d'un paramètre t. Le cas ordinaire est que les isothermes ne se coupent pas. Mais pour l'eau, le contraire a lieu. On peut donc alors parler de leur *enveloppe*.

L'enveloppe étant la limite des points de la surface par lesquels

passent encore des courbes du groupe considéré, le point que nous obtenons en indiquant le volume minimum sous la pression de une atmosphère sera un point de l'enveloppe. Par conséquent, le lieu géométrique des points qui indiquent les volumes minimum correspondant à des pressions différentes sera l'enveloppe C D E F G des courbes isothermiques. Comme nous ne connaissons pas ces courbes elles-mêmes, nous pouvons les remplacer par leurs tangentes, qui, ainsi qu'on l'a vu plus haut, sont déterminées par les observations de M. Grassi; seulement, il ne faut pas perdre de vue que le résultat ne sera assuré qu'entre les limites pour lesquelles, d'après ces observations, l'isotherme ne peut pas être distinguée de la tangente. Les expériences ont appris, en effet, que le coefficient de compressibilité ne varie que très peu avec la pression.

5. L'équation de la tangente exige la connaissance du volume à t^0 et du coefficient de compressibilité. Prenons pour le volume la formule empirique de M. Kopp:

$$v_t = 1 - \frac{610,45}{10^7}\, t + \frac{77,183}{10^7}\, t^2 - \frac{0,3734}{10^7}\, t^3,$$

et pour le coefficient de compressibilité la formule empirique

$$\beta_t = \frac{503 + 13,185\, t - 3,456\, t^2}{10^7}.$$

Cette dernière formule a été calculée par moi d'après les résultats de M. Grassi, à savoir:

$$\beta_0 = \frac{503}{10^7}$$

$$\beta_{1,5} = \frac{515}{10^7}$$

$$\beta_{4,1} = \frac{499}{10^7}.$$

Comme il y a évidemment entre 0^0 et 5^0 une valeur maximum de β, cette formule, qui fournit une valeur maximum pour

$t = 1^{\circ},9$, pourra représenter les résultats avec une exactitude suffisante entre les limites de température indiquées. Suivant cette formule on a, en omettant 10^7,

$$\beta_0 = 503$$
$$\beta_1 = 512,7$$
$$\beta_2 = 515,5$$
$$\beta_3 = 511,5$$
$$\beta_4 = 500,5.$$

Attendu que v_t diffère toujours peu de l'unité, nous écrirons, au lieu de $v_t \beta_t$, seulement β_t. L'équation de la tangente est alors :

$$-(p-1)\left\{\frac{503 + 13,185\,t - 3,456\,t^2}{10^7}\right\} =$$
$$= v - 1 + \frac{610,45\,t - 77,183\,t^2 + 0,3734\,t^3}{10^7} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I).}$$

D'après la théorie des enveloppes, l'équation ci-dessus doit être différentiée par rapport à t. Il en résulte une nouvelle équation, et par l'élimination de t entre ces deux équations on trouve le lieu géométrique des volumes minimum. Tenons-nous-en, toutefois, à l'équation obtenue par la différentiation ; elle fournit, puisque v n'y entre plus, une relation entre p et t, qui nous permet de trouver la pression pour laquelle t est la température du maximum de densité.

Cette équation a la forme suivante :

$$-(p-1)\left\{13,185 - 6,912\,t\right\} = 610,45 - 154,366\,t + 1,12\,t^2$$

ou

$$p - 1 = -\frac{\frac{d\,vt}{d\,t}}{\frac{d\,\beta t}{d\,t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II).}$$

Elle donne naturellement $p = 1$ pour $\frac{d\,v_t}{d\,t} = 0$; elle donnerait aussi $p = \infty$ pour $\frac{d\,\beta_t}{d\,t} = 0$, mais alors nous en tirerions une conclusion qui, d'après les réserves faites antérieurement, ne

serait plus justifiée. Notre équation fournit la série suivante de valeurs.

Pression en atmosphères.	Température du maximum de densité.
0	4,18
1	4,08
1,75	4
2,85	3,9
4,06	3,8
5,5	3,7
6,9	3,6
8,6	3,5
10,5	3,4

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que ce tableau tend seulement à donner une idée de la manière dont la *variation* de la température du maximum de densité dépend de la pression.

Je n'ai pas poussé le calcul du tableau au-delà de 10 atmosphères, parce que telle est aussi la pression la plus forte que M. Grassi ait employée. L'exactitude de ces chiffres est d'ailleurs entièrement subordonnée à celle des coefficients trouvés par M. Grassi; ils ne peuvent donc être considérés que comme une approximation.

7. Nous aurions aussi pu arriver à l'équation (II) sans faire usage de la théorie des enveloppes, de la manière suivante.

Si dans l'équation (I) on remplace t par $t + \Delta t$, on obtient une nouvelle équation, qui, combinée avec (I), permet, par l'élimination de v, de calculer la pression sous laquelle le volume est le même aux températures t et $t + \Delta t$. On connaît alors aussi, au moins quand Δt est petit, la pression sous laquelle la température du maximum de densité est égale à $t + \frac{1}{2} \Delta t$. En faisant ensuite $\Delta t = 0$, on retombe sur l'équation (II).

8. Représentons par $\left(\frac{d\,v}{d\,p}\right)_Q$ la valeur limite du rapport des accroissements du volume et de la pression, dans le cas où aucune chaleur n'est ajoutée ni soustraite du dehors, l'expression

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q = - v\beta_1$$

fait alors connaître la direction de la ligne adiabatique en un certain point. D'après les lois de la thermo-dynamique, on trouve facilement que β_1 est donné par l'équation suivante:

$$v\beta_1 = v\beta - \frac{A\,T}{c_p}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Dans cette équation, T désigne la température absolue, c_p la chaleur spécifique quand la pression, qui règne pour le moment, est maintenue constante; $A = \frac{1}{424}$ et $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ ont la signification connue.

Comme, pour un même point de la surface, β a deux valeurs différentes, suivant que la température est supérieure ou inférieure à celle du maximum de densité, il suit de l'équation (a) que par chaque point il passe aussi deux lignes adiabatiques. Même si l'on supposait les deux valeurs de β égales, par exemple pour 3 et 5 degrés, les deux valeurs de β_1 seraient différentes, attendu que les expériences ne donnent pas pour $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ des valeurs telles, qu'à deux températures, pour lesquelles v est le même, $\frac{T}{c_p}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p^2$ ait également la même valeur. Si maintenant on se meut sur la surface, suivant la ligne qui représente la pression de 1 atmosphère, vers le volume minimum, l'angle compris entre les deux lignes adiabatiques diminue de plus en plus, pour devenir nul au point du volume minimum, où l'on a $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = 0$ et par conséquent $\beta_1 = \beta$. Ici encore on trouve le caractère d'un groupe de lignes ayant une enveloppe. Et cette enveloppe devra naturellement coïncider avec celle des isothermes. On voit, par ces remarques, qu'il est inadmissible que deux isothermes puissent se confondre sur toute leur étendue. Dans ce cas, en effet, les deux valeurs de β seraient bien égales, mais, à moins de douter à la fois des résultats de M. Grassi et des

résultats relatifs aux volumes à des températures différentes, les deux valeurs de β seraient inégales, de sorte qu'on n'en serait pas moins obligé de conclure à l'existence de l'enveloppe, qu'on avait cru éviter en faisant coïncider les isothermes. La seule idée qui pourrait alors se présenter encore, à savoir que l'isotherme de 4° est l'enveloppe des lignes adiabatiques, impliquerait cette absurdité que, la pression croissant par voie adiabatique, l'eau serait constamment amenée à 4°.

Puisqu'on a $\beta_1 < \beta$, la ligne adiabatique s'élèvera en chaque point plus fortement que l'isotherme de ce point; l'enveloppe ayant été trouvée ci-dessus au moyen de lignes droites, les lignes adiabatiques, qui d'abord tendent moins rapidement vers l'enveloppe, devront donc plus tard s'infléchir vers elle avec plus de rapidité. Par conséquent, si les isothermes peuvent être comparées à des lignes droites, les lignes adiabatiques devront être regardées comme courbes.

9. Deux températures étant possibles en chaque point de la surface, l'état de la matière n'est pas déterminé sans équivoque. On peut rendre cet état complétement déterminé en regardant la surface comme formée de deux surfaces amenées à coïncidence, de même que les deux nappes d'une surface réglée développable peuvent être amenées par le développement à s'étendre sur un même plan, auquel cas l'arête de rebroussement devient l'enveloppe de tous les groupes de courbes qui sur la surface réglée étaient tangentes à l'arête de rebroussement en des points successifs. On peut alors distinguer une nappe supérieure et une nappe inférieure. Chacune des lignes isothermiques et adiabatiques, qui sont tangentes à l'enveloppe, appartient pour une partie à la nappe supérieure, et pour l'autre partie à la nappe inférieure. Le passage se fait sur l'arête de rebroussement. Comme alors, à volume égal et à pression égale, les deux points tombent sur des nappes différentes, on ne peut parvenir d'un état à l'autre sans passer par des états intermédiaires réels.

Si l'isotherme de 5°, qui ne serait tangente à l'enveloppe que pour une pression négative, c'est-à-dire dans des circonstances

irréalisables, est supposée située sur la nappe supérieure, celle de 4° s'étendra aussi, pour toute pression dépassant 1 atmosphère, sur cette nappe supérieure, mais celle de 3°,5 s'étendra, pour les pressions au-dessous de 10 atmosphères, sur la nappe inférieure. La dilatation est alors positive pour les points de la nappe supérieure, négative pour ceux de la nappe inférieure. Si donc, à 3°,5 par exemple, on comprime l'eau par voie isothermique, on commence sur la nappe inférieure, où la dilatation est négative; plus tard, en D, on arrive sur la nappe supérieure, où la dilatation est positive. La même remarque s'applique aux lignes adiabatiques tangentes à l'arête de rebroussement. Partant de la nappe inférieure, on finit, en les suivant, par passer sur la nappe supérieure.

10. Pour la compression par voie adiabatique on a la relation

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_Q = \frac{c_p}{A\,T\left(\frac{dv}{dt}\right)_p}.$$

Si la compression commence, en partant de 1 atmosphère, à des températures supérieures à 4°, on a $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p > 0$, et la ligne adiabatique traverse par conséquent des isothermes de température de plus en plus haute; elle n'a aucun point commun avec l'arête de rebroussement.

Si l'on part tout juste de la température du maximum de densité, la ligne adiabatique présente à son origine un élément commun avec l'arête de rebroussement et avec l'isotherme, mais à une pression plus élevée, où la température du maximum de densité s'est abaissée, on a $\left(\frac{dv}{dt}\right) > 0$, de sorte que la ligne adiabatique passe de nouveau à des isothermes supérieures.

Dans l'hypothèse où l'arête de rebroussement n'existerait pas, et où par conséquent la température du maximum de densité serait constante, toute pression exercée sur l'eau à 4°, si forte qu'on la suppose, devrait avoir lieu sans accroissement de température.

Lorsqu'on commence à comprimer à des températures au-dessous de 4°, deux cas peuvent se présenter, suivant que, par le point de départ, on peut mener une ligne adiabatique qui soit tangente à l'arête de rebroussement du côté des pressions positives ou du côté des pressions négatives. Ne connaissant, d'une manière approximative, qu'une petite partie de l'arête de rebroussement, nous ne saurions indiquer où se fait le passage d'un de ces cas à l'autre. Mais, si l'on commence à des températures très peu inférieures à 4°, on peut s'attendre au premier des deux cas. Commence-t-on par exemple, sous la pression atmosphérique, à comprimer adiabatiquement de l'eau à 3°,5, alors la température s'abaisse d'abord, parce qu'on a $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p < 0$. La ligne adiabatique s'écarte alors, plus que l'isotherme passant par le même point, de l'arête de rebroussement. Mais, la pression augmentant, le point de contact est atteint, qui sera toutefois situé plus haut que le point de contact de l'isotherme susdite. La ligne adiabatique est donc restée plus longtemps sur la nappe inférieure, et a passé, avant d'atteindre l'arête de rebroussement, sous l'isotherme, qui était déjà passée sur la nappe supérieure. Au point de contact avec l'arête de rebroussement, elle a de nouveau un élément commun avec une isotherme de température plus basse. A partir de ce point elle passe sur la nappe supérieure, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ devient > 0 et par conséquent la température recommence à croître. Nous avons vu ci-dessus qu'il pourrait y avoir une limite à l'abaissement que la température du maximum de densité subit à mesure que la pression augmente, limite qui, si la formule (II) du § 6 méritait encore confiance pour une pression infinie, serait située vers la température de 1°,9, à laquelle l'eau sous la pression atmosphérique présente le plus de compressibilité; nous aurions donc alors le second des deux cas précités en faisant commencer la ligne adiabatique, pour la pression atmosphérique, au-dessous de cette température. Dans ce cas, en effet, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ est toujours négatif, et par conséquent la température

s'abaisse d'une manière continue sous l'influence de la compression. La même chose, toutefois, peut avoir lieu à des températures un peu supérieures à 1°,9. La particularité propre au premier cas ne peut donc, toujours dans la supposition que 1°,9 soit la valeur limite de la température du maximum de densité, être attendue avec certitude qu'au voisinage immédiat de 4°.

11. L'équation (II) du § 5, écrite ainsi:

$$v = \left\{1 - (p-1)\frac{530}{10^7}\right\} - \frac{610,45 + (p-1)\,13,185}{10^7}t + \\ + \frac{77,183 + (p-1)\,3,456}{10^7}t^2 - \frac{0,3734}{10^7}t^3,$$

donne, pour une valeur constante de la pression p, le volume en fonction de t. On trouve alors:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = -\frac{610,45+(p-1)13,185}{10^7} + \frac{154,366+(p-1)6,912}{10^7}t - \frac{1,12t^2}{10^7}.$$

Pour le volume minimum apparent dans le verre, on doit avoir $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = g$, expression où g désigne le coefficient de dilatation du verre sous la pression p, lequel coefficient peut toutefois être regardé, si la pression n'est pas excessive, comme égal à celui sous la pression atmosphérique, puisque, d'après les résultats obtenus par M. Grassi, le coefficient de compressibilité du verre varie peu avec la température.

En posant $g = \frac{258}{10^7}$, on trouve que ce volume minimum correspond, sous la pression ordinaire, à environ 5°,8, mais, sous la presson de 7 atmosphères, à environ 5°.

Ce résultat m'a paru, en attendant des méthodes plus directes, se prêter le plus facilement à une vérification provisoire. J'ai fait usage pour cela du piézomètre d'Oersted, et j'ai cherché, sous la pression ordinaire et sous celle de 7 atmosphères, la température à laquelle l'eau, dans le réservoir de verre ordinairement employé pour le piézomètre, présente un volume apparent minimum.

Pour que la température restât aussî constante que possible durant chaque expérience, le piézomètre était lui-même placé dans un vase contenant de l'eau, dont la température était rendue égale à celle qu'on devait avoir dans le piézométre. Deux thermomètres fixes dans le piézomètre, l'un en bas, l'autre en haut, servaient à faire connaître, par l'égalité et la constance de leurs indications, si la même température régnait en tous les points. Lorsque l'eau du réservoir en verre s'était arrêtée à une position fixe, on notait cette position, d'abord sous la pression ordinaire, puis après compression. Il était difficile, à chaque température nouvelle, de rendre la pression toujours la même. Or, une légère erreur dans cette pression ayant une grande influence, les chiffres suivants, fournis par mes expériences, ne doivent être considérés que comme des résultats approchés:

	Index du réservoir	
t.	à la pression ordinaire	à 7 atmosphères.
0,1	102,9	91
2,8	96	83,5
4,1	94	82
5,1	93,2	81,9
5,4	93,1	82
6,1	93,1	82

[1])

Une seconde série d'observations a donné des résultats presque entièrement identiques. Et, bien que ces résultats ne permettent pas d'indiquer avec précision à quelle valeur de *t* correspond le volume minimum, ils peuvent pourtant être regardés comme une confirmation provisoire de cette conclusion; que la température du volume minimum de l'eau est, sous une pression supérieure, plus basse que sous la pression ordinaire.

La Haye, décembre 1876.

[1]) Comme on emploie, dans la formule (1), la valeur de β qui est déduite des observations faites entre 0° et 4°, cette formule ne peut être appliquée quand on s'écarte beaucoup de ces limites. Le fait que, dans mes expériences, la compressibilité à été trouvée plus grande à 2°,8 qu'à 0° et qu'à 4°, est d'accord avec le résultat obtenu par M. Grassi.

NOTICE

SUR UN

SYSTÈME DE COLORIAGE DES CARTES GÉOLOGIQUES,

PAR

JULES HUGUENIN

Ingénieur des mines.

(Planches IX, X et XI).

Aucun géologue ne désavouera une tentative, quelque faible qu'elle puisse être, ayant pour objet de colorier les cartes géologiques d'après un principe raisonné et plus ou moins logique [1]).

En effet, si claire que soit sur une carte géologique l'indication des divers terrains par l'emploi de couleurs tranchantes, la lecture de la légende explicative demande toujours une application spéciale et souvent ennuyeuse, — témoin la grande carte géologique de *la Suisse*, où l'on a vainement tâché d'indiquer avec clarté plus de deux cents subdivisions de terrains, par autant de signes et de couleurs.

Bien qu'on ait admis quelquefois pour certains terrains des couleurs conventionnelles, — *le noir* pour indiquer le terrain houiller productif, *le bleu* pour le calcaire de montagne, *le vermillon* pour les roches trachytiques etc. [2]), — cette convention

---

[1]) Von Cotta dit dans ses „*Geognostische Karten unseres Jahrhunderts*", p. 4. „Es wäre sehr gut wenn man sich von der Zeit an, in welcher man anfing geognostische Karten zu coloriren. über bestimmte Principien geeinigt hätte."

[2]) Voyez p. e. l'ouvrage cité de Von Cotta, p. 5; ensuite la carte géologique de l'*Europe* et celle de la *Belgique* par A. Dumont; la carte géologique de l'*Allemagne*, de la *France*, de l'*Angleterre* et des pays limitrophes par le Dr. Von Dechen, Berlin, 1869; J. Marcou, carte géologique de la *Terre*; etc. etc.

est loin d'être généralement adoptée, comme le montre, par exemple, la couleur i' des terrains houillers productifs sur la carte de la Prusse Rhénane de M. von Dechen.

Sur cette carte aussi on a voulu représenter plus de 70 formations par une cinquantaine de nuances de couleurs: le succès n'a pas été complet, car la couleur c^3 (calcaire à cérites) ne diffère pas essentiellement de la couleur d^7 (le gault); la même concordance se retrouve entre e' (le grès du weald) et h (les schistes cuprifères); entre f^2 et g^3; etc. [1]).

Un autre point à considérer est celui des frais d'impression, quand la carte est destinée à être reproduite par un procédé chromo-lithographique quelconque. Chaque pierre à couleur demande un déboursé, et le choix des couleurs fait par l'auteur d'une carte géologique n'est nullement indifférent à l'éditeur; si c'est à celui-ci que ce choix est abandonné, il est plus que probable que les vues de l'auteur ne seront pas suivies exactement.

Ce n'est pas ici le lieu d'énumérer les avantages que présenterait à la science une convention internationale concernant la manière de colorier les cartes géologiques: ces avantages seraient en proportion aussi grands que ceux qui furent obtenus lorsqu'on commença à dresser les cartes géographiques d'après une même projection topographique.

Il va sans dire que le système proposé ne sera pas applicable à toutes les espèces de cartes géologiques, car, là où l'auteur lui-même n'a pas su classer son terrain dans un groupe connu, la légende ne pourra jamais fournir de plus amples éclaircissements.

Dans le cas ci-dessus, ou quand on voudra donner une carte géologique contenant une multitude de subdivisions de terrains, — carte généralement dressée à une grande échelle, — l'auteur devra avoir recours à certaines combinaisons, dont il sera parlé plus loin.

---

[1]) Sur la belle carte géologique de *la Bavière* par M. Guembel, on rencontre les mêmes difficultés, quoique à un moindre degré. Discerner le grès bigarré du keuper inférieur des Alpes, et cette dernière formation du terrain nummulitique, sans faire attention aux lettres, sera malaisé, même pour l'œil le moins achromatopsique du monde.

Revenant au système que je me propose d'expliquer, je remarquerai que j'ai suivi la méthode ordinaire de division des roches en trois groupes principaux, savoir: 1°. les masses éruptives, comprenant les roches *plutoniques* et *volcaniques*, 2°. les formations *neptuniennes* proprement dites, et 3°. les roches *métamorphiques*.

Les terrains appartenant au premier groupe sont indiqués par une couleur [1]) ou une teinte autant que prossible égale (1) [2]). Ceux appartenant au second groupe sont représentés par un système de lignes parallèles, striées, ondulées, pointillées, de files de petites croix ou de points, etc. (3). Le troisième groupe, présentant un caractère mixte de formation éruptive et sédimentaire, est marqué d'après la nature de ces roches, donc par la combinaison d'une teinte dite égale et d'un système de lignes parallèles (4).

Un quatrième groupe, qu'on pourrait appeler „roches métamorphiques impropres" et auquel appartiennent les conglomérats, les brèches et surtout les tufs, est indiqué par un système de points de diverses grandeurs distribués d'après certaines règles (2).

De cette manière, on a tâché de classer les roches géognostiquement et d'en rendre la distinction possible au premier coup d'œil.

Les roches éruptives sont divisées, d'après le système du Dr. Senft [3]),

[1]) On comprend ici par „teinte ou couleur autant que possible égale", une teinte résultant de l'effet produit par un système de lignes parallèles ou entrecroisées, très-fines et très-serrées, obtenu au besoin par l'application d'une couleur sur elle-même ou sur une ou deux autres.

[2]) Les chiffres romains du texte correspondent aux numéros des spécimens de gravure sur les trois tableaux joints à cette notice (Planches IX, X et XI).

[3]) J'ai suivi la classification de M. Senft, parce qu'il m'a paru que, parmi tous les systèmes de division en groupes, celui-ci satisfait le mieux au besoin actuel. Rien n'empêche pourtant d'adopter un autre plan de classification, dans lequel, par exemple, l'âge relatif des roches, après une étude tout à fait spéciale de cette branche de la Géologie, serait le guide. De même, on pourrait suivre la manière de voir de MM. Zirkel, Naumann, Vogelsang, Credner, etc. Il est bien clair que, quant à la lecture d'une carte géologique, il est parfaitement indifférent que tel ou tel système de division ait été choisi; seulement, l'indication d'un trop grand nombre de subdivisions de terrains serait quelquefois fatigante et paraît ne pas répondre au but que l'auteur se propose.

en sept catégories principales, dont les subdivisions sont marquées par des lettres et surtout par des signes imprimés en noir.

Ainsi on rend le granite et la syénite par la même couleur — carmin simple, — mais on place dans l'indication du granite la lettre G et le signe ×, et dans celle de la syénite la lettre S et le signe >.

On imprime les lettres et les signes en trois grandeurs: la plus grande lettre indique l'éruption ou l'apparition la plus reculée, les lettres de moyenne grandeur indiquent les éruption postérieures, et la petite lettre les éruptions récentes. Le grand signe ×, par exemple, indique la structure porphyroïde, le signe × de moyenne grandeur la structure „à grains moyens", tandis que le petit × accuse une composition dite „à grains fins".

Grâce à l'impression de lettres de diverses grandeurs et de lignes de démarcation nettement tracées, on peut apercevoir de suite, par exemple, sur la carte géologique du royaume de *Saxe* dressée par M. Naumann, l'âge relatif des porphyres, le fait que le porphyre a percé à travers le granite et que l'inverse n'a pas eu lieu, etc.

On voit donc qu'il est facile d'indiquer l'âge relatif des roches éruptives entrecroisées, chose importante surtout quand ces masses appartiennent à une même famille (les porphyres de Saxe p. e.), ou qu'elles ne présentent que peu de différence entre elles.

Les sept catégories de roches éruptives proprement dites sont représentées par les couleurs suivantes [1]):

---

[1]) On a adopté trois couleurs fondamentales, le carmin clair (1), le jaune clair (2) et le bleu clair (3). En prenant chaque couleur séparément, en la combinant avec elle-même une ou deux fois, ou en les joignant ensemble, on obtient dix-neuf couleurs ou nuances de couleurs. Deux systèmes de stries croisées carmin clair (1) produisent ainsi le carmin simple (1 + 1), tandis qu'une combinaison de trois systèmes de stries produira le carmin foncé (1 + 1 + 1). De même on obtient, par une combinaison de deux stries bleues et une rouge, le violet bleuâtre (1 + 3 + 3); etc.

1°. (1 + 1)	= carmin simple	= orthoclasites	(**5**)
2°. (1 + 2)	= orange pur	= sanidinites	(**6**)
3°. (1 + 1 + 3)	= violet rougeâtre	= hypérites	(**7**)
4°. (1 + 3 + 3)	= violet bleuâtre	= basaltites	(**8**)
5°. (2 + 2 + 3)	= vert jaunâtre	= amphibolites	(**9**)
6°. (2 + 3 + 3)	= vert bleuâtre	= diabasites	(**10**)
7°. (3 + 3 + 3)	= bleu foncé	= mélaphyrites	(**11**)

A ces sept classes on a joint trois autres roches plutoniques, qui peut-être seraient mieux appelées „schistes éruptifs":

8°. (1 + 2 + 3)	= brun neutre	= stilpnolites	(**12**)
9°. (2 + 2)	= jaune simple	= quartzites	(**13**)
10°. (1 + 1 + 1)	= carmin foncé	= serpentinites	(**14**)

Enfin, on y a rattaché également quatre autres divisions, qui par leur origine semblent ne pas appartenir aux formations neptuniennes, ou, du moins dont la provenance reste problématique:

11°. (3)	= bleu clair	= roches calc. prim.	(**15**)
12°. (3 + 3)	= bleu simple	= id. de dolomie	(**16**)[1]
13°. (2 + 3)	= vert pur	= marnes	(**17**)
14°. (1 + 1 + 2)	= orange rougeâtre	= argiles prim.	(**18**)[2]

Il n'a pas paru nécessaire d'énumérer les variétés de roches comprises dans chacune des quatorze catégories précédentes; on trouvera ces détails dans la „*Classification und Beschreibung der Felsarten*" du Dr. F. Senft, Breslau, 1857.

On désigne, comme nous l'avons dit plus haut, les variétés par des lettres et des signes, — tels que g (granite), gt (granu-

---

[1]) Quoiqu'on doute de plus en plus de l'existence d'une formation primitive de dolomie, il n'y a rien de prouvé à cet égard (voyez Zirkel, *Lehrbuch der Petrographie*, tome I, page 243).

[2]) Peut-être cette roche serait-elle appelée à meilleur titre: „schiste argilo-calcaire de la formation argileuse primordiale. (Voyez Naumann, *Lehrbuch der Geognosie*, tome II, page 144). Les groupes **11—13** disparaîtront probablement au fur et à mesure que les roches trouveront leurs vraies places dans une des formations primaires.

lite), gn (greisen), go (gabbro), etc., et les signes > < ∨ ∧ ¬ ×, ou d'autres pris à volonté [1]).

De plus, on imprime la couleur sans signe aucun si la roche est une formation soi-disant „simple" [2]); ainsi on ne placera pas de signe dans la serpentine proprement dite, dans les roches calcaires et dolomitiques, dans la roche de quartz proprement dit, la marne, etc.

Si la roche présente une structure stratifiée ou lamellaire (le gneiss, les schistes dioritiques, les quartz schisteux, etc.), non-seulement on imprime sur la couleur les signes conventionnels, mais on la traverse encore d'un système de lignes noires verticales, parallèles, très minces et assez espacées (**19—22**).

Les roches éruptives stratifiées ou schistoïdes, indiquées comme on vient de le dire, sont essentiellement distinctes des schistes métamorphiques proprement dits et du gneiss à caractère neptunien bien accusé. Ceux-ci, provenant d'une action plutonique sur les formations sédimentaires, seront donc marqués par les deux désignations combinées.

Ainsi on désignera le gneiss provenant de l'action du granite sur le grès silurien, du diorite ou du diabase sur le même grès, par une combinaison de la légende de ces roches éruptives et sédimentaires, toutefois *sans y imprimer le signe conventionnel* de la roche éruptive (**23—25**): le signe est indépendant de la roche mère, mais indique la nature du produit, soit > pour le schiste talqueux, ou ∨ pour le schiste micacé, etc.

On voit par là que non-seulement on peut distinguer d'une manière simple le gneiss éruptif du gneiss provenant d'une méta-

---

[1]) Il serait avantageux d'attribuer à chacun des principaux minéraux que contiennent les roches éruptives un signe particulier, comme × pour l'orthose, + pour l'albite, etc. Mais pour cela il faudrait pouvoir disposer d'une trentaine de signes, dont la lecture présenterait de sérieuses difficultés.

[2]) Des roches de composition simple ne se trouvent que très rarement dans la nature. Il est donc évident qu'il faut attribuer au mot „simple" un sens assez large, puisqu'on y a compris même les marnes primitives — si toutefois il en existe!

morphose de couches de grès ou de schiste, mais encore qu'il est facile d'indiquer l'âge relatif du gneiss, et de marquer au besoin le gneiss dioritique ou le schiste talqueux etc. résultant d'une roche éruptive quelconque [1]).

Par écrasement, pulvérisation, transport, décomposition et reconstruction, naissent les cailloux roulés, les conglomérats, les brèches et les tufs, qu'on représente par des petits points ou des mouchetures de la couleur de la roche originelle, tandis que les lettres ca, co, b. t, etc. marquent la forme pétrographique sous laquelle ces dépôts se présentent. De cette manière nous indiquons le conglomérat de schiste micacé (**26**), le tuf de wacke de basalte (**27**), la brèche de quartz schisteux (**28**) et la brèche de syénite (**29**).

La grandeur relative des points dépend du nombre de fois qu'on a employé la même couleur dans l'impression des hachures; de là trois diverses grandeurs de points.

Les laves ne sont pas des produits d'écrasement, mais des roches provenant de coulées de masses en fusion, et qui par conséquent offrent un caractère plutonique incontestable: ce sont des espèces de basalte, de dolérite, de trachyte, etc. Comme elles naissent toujours d'un cratère et présentent une coulée, on les indique dans la masse environnante par des lignes de contour nettement tracées, entre lesquelles on place une petite flèche. Exemples: lave de domite sur andésite (**30**), lave phonolithique sur phonolithe (**31**), lave de basalte sur dolérite (**32**).

---

[1]) Comme on le sait, le nom de „gneiss" est ordinairement appliqué à une roche métamorphique provenant de l'action modifiante du granite sur des dépots aqueux quelconques, action par laquelle le granite prend un caractère schisteux et le dépôt aqueux devient cristallin. Mais les porphyres et les „grunstein", en sens général, font aussi naître des formations parallèles, qu'on a coutume d'appeler p. e. schiste dioritique ou diorite schisteux. Voyez Naumann, *Geognosie*, Tome I, page 793; Naumann, *Geologische Beschreibung des Königreichs Sachsen's*, 1ste Heft, pag. 102; 2e Heft. pag. 96; 3e Heft, pag. 276, etc.

L'indication des roches neptuniennes enfin, quoique en apparence plus compliquée, peut être réduite à des formes bien simples, quand on divise ces formations en groupes suivant un système quelconque.

Comme les roches en question présentent toutes une apparence plus ou moins stratifiée, ou les a représentées par des plans hachés, par des lignes droites, ondulées, entre-coupées, pointillées, etc.

Les lignes sont dressées verticalement pour les terrains primaires, inclinées à droite ou à gauche pour les terrains secondaires et tertiaires, et horizontales pour les couches quaternaires (**33**—**36**): des indications plus circonstanciées sont données, à ce sujet, par les figures **37** à **40** de nos tableaux.

Les quatre couleurs: rouge, jaune, bleu et gris, sont destinées à faire connaître le caractère pétrographique dominant de la roche. On propose d'employer le rouge quand les assises sont essentiellement argileuses, le jaune quand elles sont quartzeuses, le bleu quand elles sont calcaires, et le gris si la couche ne rentre dans aucune des trois catégories précédentes (**33**—**36**) [1]).

Les diverses couches d'argile, de pierre calcaire etc., appartenant à une même formation, sont indiquées par le même système de lignes, continues, entre-coupées, pointillées, etc. Les lignes des diverses subdivisions diffèrent seulement entre elles par l'épaisseur et la distance (**41**—**46**) [2]).

Si l'on ne peut assigner à un terrain une place déterminée dans le cadre des formations groupées par ordre chronologique,

---

[1]) Ainsi il faudrait colorier l'argile quartzifère en rouge, le grès argileux en jaune, et les roches où ne prédomine ni le quartz, ni l'argile, ni le calcaire, en gris.

[2]) Les lignes sont tracées en partant d'une distance d'un demi-millimètre et d'une épaisseur d'un dixième de millimètre. On a figuré sous le n⁰ **48**, comme exemple, les subdivisions du trias qui se trouvent sur la carte géologique de la Bavière, dressée par l'Inspecteur des mines Guembel: à droite est reproduite la partie correspondante de la légende de cette carte, et à gauche les mêmes subdivisions sont représentées d'après le système qui vient d'être exposé.

— comme cela est le cas, par exemple, pour la plus grande partie des terrains sédimentaires de l'île de Bangka, — nous proposons de le rendre par une combinaison des légendes des terrains parmi lesquels il peut être rangé; — ainsi, pour l'île de Bangka, par une combinaison de lignes continues, de lignes entre-coupées et de lignes pointillées, toutes dressées verticalement (**47**).

Quand les conglomérats, brèches, etc. naissent de formations neptuniennes, on les désigne par l'indication des couches dont ces conglomérats etc. sont originaires, en y plaçant des points de même couleur.

Les couches productives de houille sont représentées par un petit trait noir, assez épais, sur lequel on place perpendiculairement une petite flèche. On trace le trait de houille suivant l'azimut de la direction moyenne de la couche, ayant soin de marquer par de petits chiffres l'azimut et le nombre de degrés d'inclinaison; les couches dressées verticalement ont deux flèches.

Si la direction de la couche est inconnue, on place la ligne de houille verticalement, sans chiffres d'azimut; deux ou un plus grand nombre de couches seront rendues par deux signes de houille (**55**).

Les localités où l'on trouve des fossiles sont indiquées par une petite figure d'os, de poisson, de coquille ou de feuille, selon la nature zoologique ou botanique des fossiles (**56**).

Les endroits où l'on rencontre des minéraux utiles sont marqués par un astérisque. Là où il y a des minérais exploitables, on les indique par des signes conventionnels, — soit O pour l'or, etc. —

Batavia, 25 avril 1877.

Il me paraît clair que, dans ce dernier tableau, on peut discerner au premier coup d'œil 1°. que les couches appartiennent à la même formation: 2°. qu'on y trouve cinq couches calcifères, deux argileuses, une seule quartzifère et deux de nature mixte; 3°. que la couche kl. par exemple, a été déposée avant la formation de la couche ku. La couche argilifère inférieure est bien mentionnée dans le texte de M. Guembel, mais ne se retrouve pas sur le tableau des couleurs.

NOTES POUR LE LITHOGRAPHE.

1°. Le procédé chromo-lithographique doit être appliqué avec des couleurs *non* transparentes.

2°. Quand on veut imprimer deux ou trois systèmes de hachures l'un sur l'autre, la distance des hachures doit être rigoureusement observée, — et de même quand on n'emploie qu'un seul système. La distance des hachures doit être le *double* de l'épaisseur de la ligne hachée: par ce moyen on obtient presque mathématiquement: avec un seul système de rayures ⅓ de couleur et ⅔ de clair, avec deux systèmes de rayures ½ de clair et ½ de couleur, et avec trois systèmes de rayures ⅓ de clair et ⅔ de couleur.

3°. Quand on n'imprime qu'un seul système de lignes parallèles, les lignes sont horizontales. Emploie-t-on deux systèmes, alors les hachures, entre-coupées sous des angles droits, sont dressées de droite à gauche et de gauche à droite; avec trois systèmes, on combine le système à deux hachures avec des lignes horizontales.

4°. On imprime d'abord la pierre bleue, puis la pierre rouge, puis la pierre jaune et enfin la pierre grise.

5°. Les nuances jaunes doivent être les plus prononcées; la couleur rouge doit être moins forte, puis successivement le bleu et le gris.

6°. L'artiste lithographe doit s'appliquer particulièrement à bien choisir l'intensité des couleurs, de manière que leurs combinaisons forment les tons les plus purs et les nuances les plus agréables;

en d'autres termes, l'intensité du bleu doit être telle qu'il produise avec le rouge un violet *pur*.

7°. Les lignes verticales des roches métamorphiques et les signes des masses éruptives (v > etc.) doivent être tracés aussi minces que possible, sans toutefois être assez fins pour nuire à la clarté de la légende. On pourrait essayer d'imprimer ces lignes et les signes et lettres en couleur *grise*, ce qui laisserait la pierre noire entièrement libre pour la légende géographique.

PROGRAMME

DE LA

Société Hollandaise des Sciences, à Harlem.

ANNÉE 1877.

La 125ième réunion générale de la Société a eu lieu le 19 mai 1877.

Le Directeur-Président, Jhr. G. F. VAN TETS, ouvre la séance par un élégant discours, dans lequel il rappelle aux Membres que la Société a cette année l'avantage de célébrer le 125e anniversaire de sa fondation. A cette occasion, il retrace en traits rapides l'histoire de la Société, et montre comment, à l'origine simple centre de réunion pour quelques habitants de Harlem qui avaient le goût des études scientifiques, elle est parvenue successivement à un haut degré de prospérité. En parcourant les procès-verbaux des réunions, dont la collection complète figure aux archives, il a été particulièrement frappé de ce que, à l'inverse de beaucoup d'autres institutions analogues, entravées dans leur développement ou même atteintes dans leur existence par les

troubles politiques, la Société hollandaise n'en a jamais subi le contre-coup. Il attribue cet heureux privilége à deux causes principales: d'abord, à l'esprit vraiment scientifique et à l'absolu respect de l'opinion individuelle en matière de politique, de religion et de science, qui ont toujours prévalu chez les directeurs et chez les membres; ensuite, à la libéralité éclairée avec laquelle, en toutes circonstances, les directeurs ont encouragé les recherches scientifiques. Le Président exprime l'espoir que la Société, en restant fidèle à ces deux principes, verra croître, dans l'avenir comme dans le passé, sa prospérité et son influence. En terminant, il consacre quelques paroles sympathiques à la mémoire de M.M. J. de Bosch Kemper, membre national, E. Eichwald de St. Pétersbourg, C. G. Ehrenberg de Berlin, K. E. von Baer de St. Pétersbourg, W. Sartorius von Waltershausen de Goettingue et W. Hofmeister de Tubingue, membres étrangers, tous décédés dans le courant de la dernière année.

Il est donné connaissance à l'Assemblée de la décision par laquelle les directeurs ont accordé une subvention de 300 florins à la Commission qui s'est donné pour tâche de provoquer l'équipement d'une expédition néerlandaise à la Nouvelle-Zemble et en d'autres points intéressants des régions arctiques. La Société est aussi intervenue dans les frais du monument à élever, à Wurzbourg, en l'honneur de notre ci-devant compatriote, feu Ph. von Siebold, le voyageur bien connu auquel on doit de riches collections de plantes et de documents ethnographiques du Japon.

A l'Exposition internationale de Philadelphie, en 1876, la Société a été couronnée pour l'envoi de ses publications et pour l'appui énergique qu'à partir de sa fondation, en 1752, elle a prêté à ceux qui cultivent les sciences.

La publication des *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* a continué régulièrement; les nos 4 et 5 du Tome XI et 1 et 2 du Tome XII ont paru depuis la dernière réunion générale.

Aucun mémoire n'a été reçu cette année en réponse aux questions mises au concours.

L'assemblée nomme membre national de la Société:

M. E. VAN DER VEN, directeur de l'Ecole supérieure de Harlem; et membres étrangers:

M. M. J. SACHS, professeur de botanique à Wurzbourg,
CLAUDE BERNARD, professeur de physiologie à Paris,
C. NÄGELI, professeur de botanique à Munich,
T. H. HUXLEY, professeur de zoologie à Londres, et
Ch. R. DARWIN, à Down (Beckenham, Kent).

La Société met au concours les questions suivantes, en fixant le terme de rigueur au

1er janvier 1879.

I. On demande des expériences exactes sur la condensation de différents gaz à la surface des corps solides à des températures diverses.

II. Le décroissement graduel de la température dans les couches successives de l'atmosphère ne paraît pas être le même à toutes les latitudes géographiques. Communiquer de nouvelles déterminations à ce sujet.

III. Faire de nouvelles recherches expérimentales sur l'influence que les racines des plantes exercent sur la décomposition des matières organiques dans le sol,

IV. Etudier expérimentalement les diverses propriétés physiques du produit nouveau appelé *verre dur*, comparées à celles du verre ordinaire.

V. On demande un travail pouvant contribuer à faire connaître l'état thermique du Soleil.

VI. Soumettre à de nouvelles recherches les phénomènes d'assimilation chez les Champignons supérieurs.

VII. On demande la monographie d'une espèce encore peu étudiée prise parmi les animaux marins inférieurs.

VIII. Donner la théorie mathématique du vol des Oiseaux.

La Société rappelle les questions suivantes, pour lesquelles le concours sera fermé le

1er janvier 1878.

I. On demande des recherches exactes concernant le pouvoir dissolvant de l'eau et de l'eau chargée d'acide carbonique pour le gypse, le calcaire et la dolomie, à des températures et à des pressions différentes, et dans le cas de la présence simultanée du sel marin et d'autres sels solubles très répandus dans la nature.

II. On demande des recherches exactes concernant le pouvoir dissolvant de l'eau et de l'eau chargée d'acide carbonique pour la silice et les silicates naturels les plus communs, à des températures et à des pressions différentes, et dans le cas de la présence simultanée du sel marin et d'autres sels solubles très répandus dans la nature.

III. Soumetre à une nouvelle étude la structure des reins des mammifères, spécialement en ce qui concerne le revêtement épithélial dans les différentes parties des tubes rénaux.

IV. Il paraît résulter des travaux récents que les peptones de différentes matières albuminoïdes sont des mélanges de substances en partie déjà connues et en partie encore inconnues. On demande un examen critique de ces travaux, complété par des recherches personnelles sur la même question.

V. Déterminer exactement, en unités de Weber, la résistance d'une colonne de mercure de un mètre de longueur et de un millimètre carré de section, à 0°. Toutes les mesures relatives à cette détermination devront être communiquées d'une manière aussi complète que possible.

VI. Faire mieux connaître, par des expériences soignées, le rapport entre les deux espèces d'unités électriques, unités électro-magnétiques et unités électro-statiques. Toutes les mesures relatives à cette détermination devront être communiquées d'une manière aussi complète que possible.

VII. On demande de nouvelles expériences concernant l'influence de la pression sur l'action chimique.

VIII. Nos connaissances sont encore très bornées au sujet de la quantité de limon et d'autres matières que les rivières charrient vers la Néerlande, des endroits où ces matières se déposent de préférence, et des circonstances qui influent sur leur transport et leur dépôt. On désire voir élucider ces divers points, pour une ou plusieurs des rivières de notre pays, par des mesures ou des expériences continuées pendant quelques années.

1er janvier 1880.

IX. Quelle est l'influence de la lune sur la position de l'aiguille aimantée?

X. La marche de la science a amené dans la distinction de plusieurs espèces de plantes et dans la définition même de l'espèce une sorte de confusion. On s'est aperçu que la plupart des espèces admises anciennement renferment des formes diverses, que les uns appellent des races ou variétés, les autres des espèces. Les travaux déjà faits sur les *Rubus*, *Hieracium*, *Mentha*, *Salix*, etc., sont importants, mais ils ont le défaut d'être relatifs à des espèces très rapprochées les unes des autres, par conséquent assez confuses. En outre, on a presque toujours étudié les formes d'un certain pays, par exemple les Rubus d'Angleterre ou d'Allemagne, au lieu de comparer toutes les formes d'une certaine espèce de Rubus.

On demande par conséquent *une étude approfondie de quelques-unes des espèces de Linné, choisies parmi celles qui présentent plus ou moins de formes diverses*, en ayant égard aux conditions suivantes:

1°. Les espèces devraient être des plantes spontanées, au nombre de dix au moins et de vingt au plus, appartenant à deux familles naturelles au moins, et habitant des pays bien explorés, tels que l'Europe, les Etats-Unis, etc.

2°. L'auteur devrait chercher, décrire et classer toutes les formes plus ou moins distinctes et plus ou moins héréditaires, qui rentrent dans des espèces linnéennes, en ayant soin d'indiquer leur habitation, leur station, et de dire s'il les a vues vivantes, ou dans les herbiers, ou s'il les mentionne d'après les livres.

3°. Il devrait étudier leur mode de fécondation et apprécier jusqu'à quel point certaines formes peuvent être attribuées à des croisements.

4°. Le degré d'hérédité des formes devrait être constaté par expérience, au moins dans un certain nombre de cas, et, lorsqu'il ne s'agit pas d'espèces ligneuses, pendant deux générations au moins.

5°. Pour les espèces ligneuses, il faudrait constater la possibilité ou l'impossibilité de greffer les formes appartenant au même genre les unes sur les autres.

6°. La classification des formes en espèces, races ou sous-espèces, variétés, sous-variétés, variations, sous-variations et autres subdivisions qui seraient nécessaires, devrait être basée à la fois sur les formes extérieures et sur les affinités plus intimes démontrées par la fécondation et la greffe.

La Société recommande aux concurrents d'abréger autant que possible leurs mémoires, en omettant tout ce qui n'a pas un rapport direct avec la question proposée. Elle désire que la clarté soit unie à la concision, et que les propositions bien établies soient nettement distinguées de celles qui reposent sur des fondements moins solides.

Elle rappelle, en outre, qu'aucun mémoire écrit de la main de l'auteur ne sera admis au concours, et que même, une médaille eût-elle été adjugée, la remise n'en pourrait avoir lieu, si la main de l'auteur venait à être reconnue, entre-temps, dans le travail couronné.

Les plis cachetés des mémoires non couronnés seront détruits sans avoir été ouverts, à moins que le travail présenté ne soit qu'une copie d'ouvrages imprimés, auquel cas le nom de l'auteur sera divulgué.

Tout membre de la Société a le droit de prendre part au concours, à condition que son mémoire, ainsi que le pli, soient marqués de la lettre L.

Le prix offert pour une réponse satisfaisante à chacune des questions proposées, consiste, au choix de l'auteur, en une *médaille d'or* frappée au coin ordinaire de la Société et portant le nom de l'auteur et le millésime, ou en une somme de *cent-cinquante florins*; une prime supplémentaire de *cent-cinquante florins* pourra être accordée si le mémoire en est jugé digne.

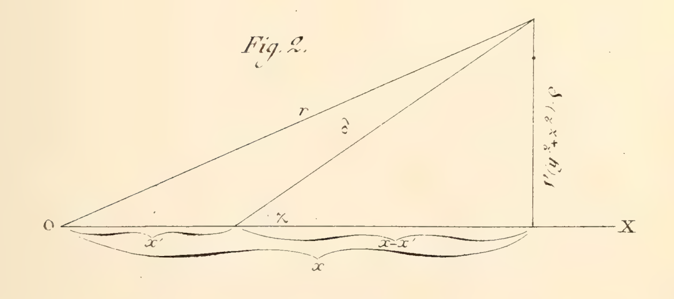
Le concurrent qui remportera le prix ne pourra faire imprimer le mémoire couronné, soit séparément, soit dans quelque autre ouvrage, sans en avoir obtenu l'autorisation expresse de la Société.

Les mémoires, écrits lisiblement, en *hollandais*, *français*, *latin*, *anglais*, *italien* ou *allemand* (mais non en caractères allemands), doivent être accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom de l'auteur, et envoyés franco au Secrétaire de la Société, le professeur E. H. von Baumhauer, à Harlem.

Fig. 1.

B‴
H‴
F‴
L
O
M
N
D‴
B″ H″ F″ D″ P A G E C D F H B
D
F′
H′
B′

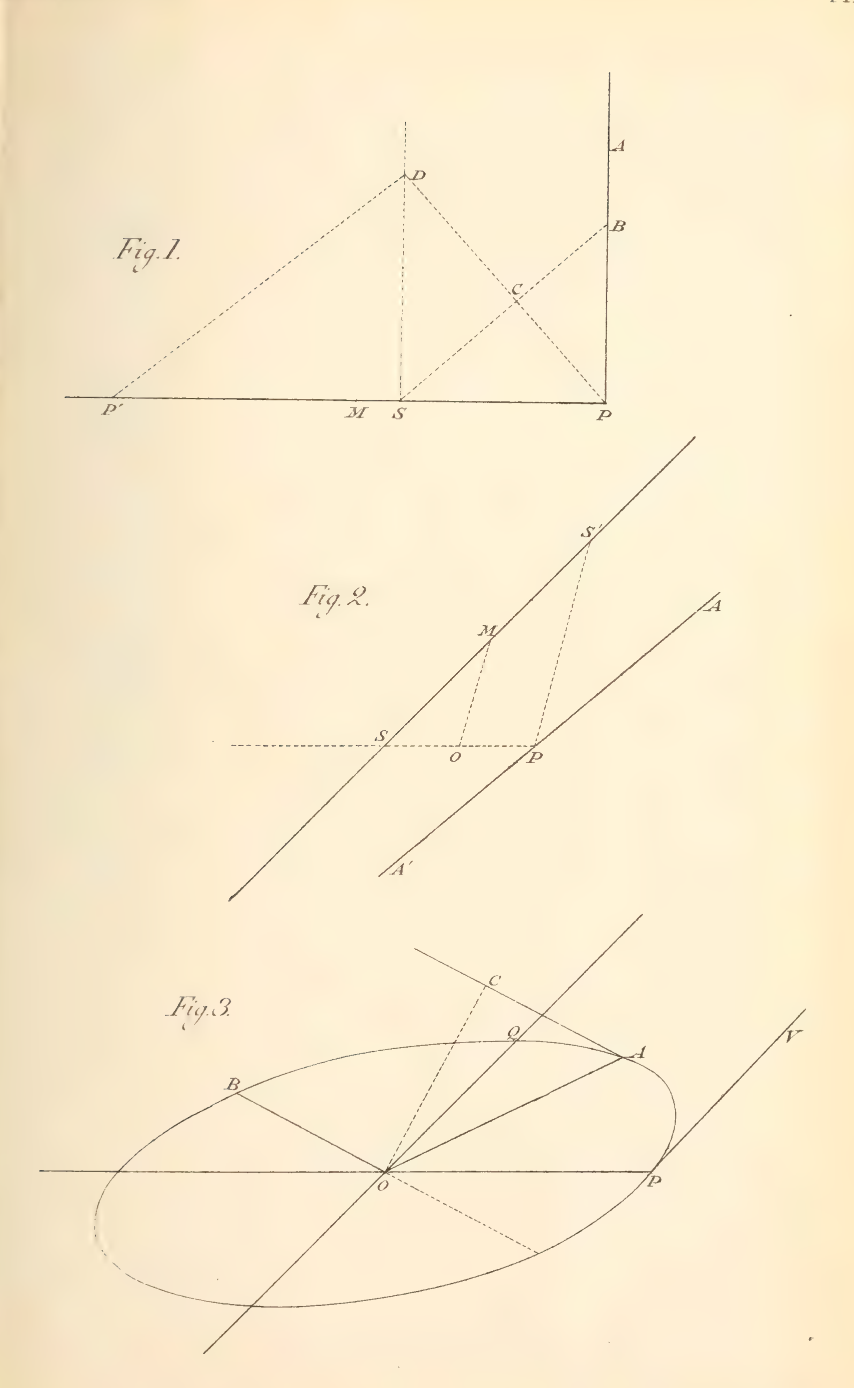
Fig. 2.



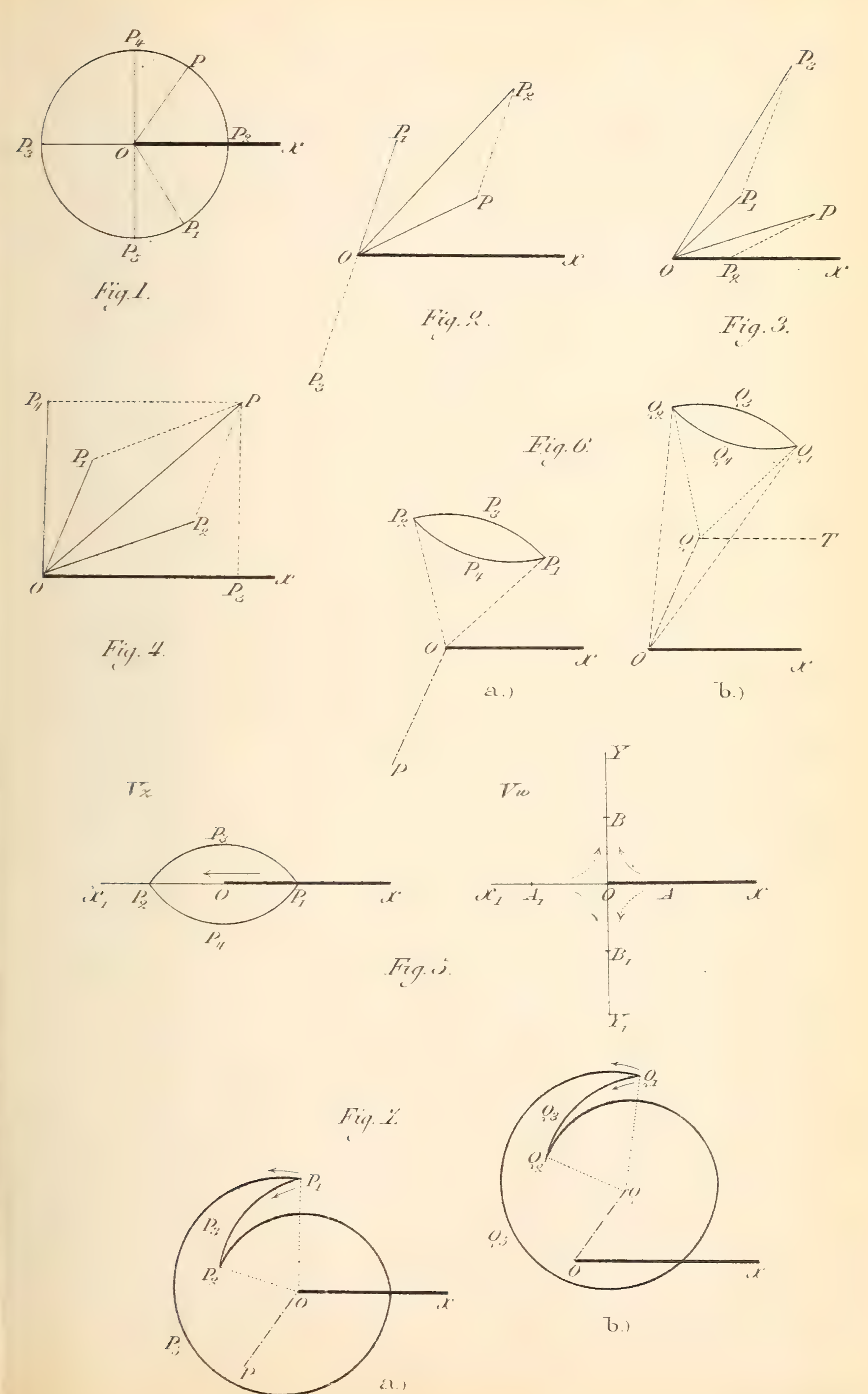


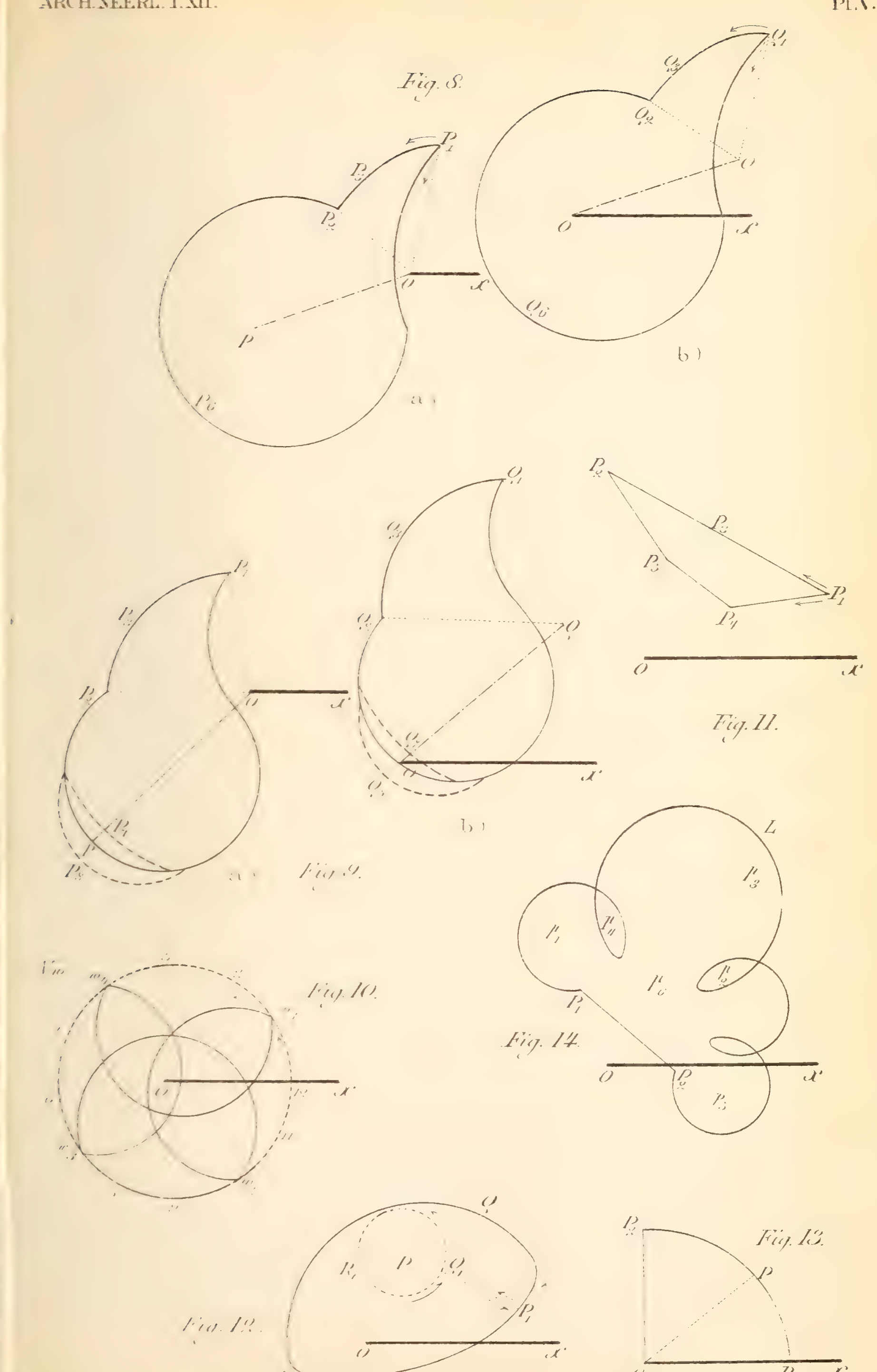
P. Bleeker, dir. L. Speigler, del. Lith. v. Emrik & Binger.

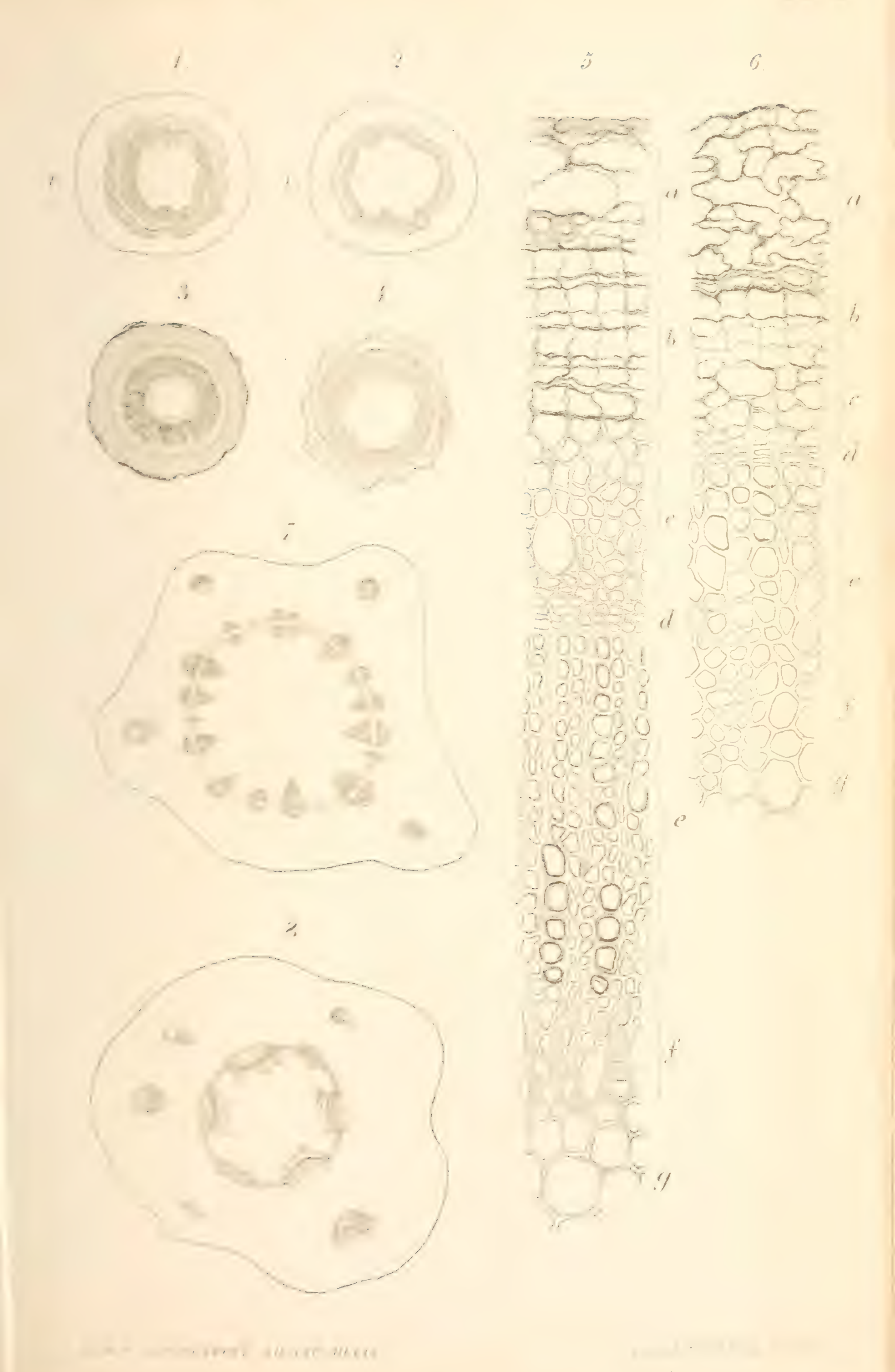
Acanthochaetodon alternans Blkr.



Lith. Emrik & Binger.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
a.)
b.)


Fig. 8.
a)
b)
Fig. 9.
a)
b)
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
a
b
c
d
e
f
g

9.



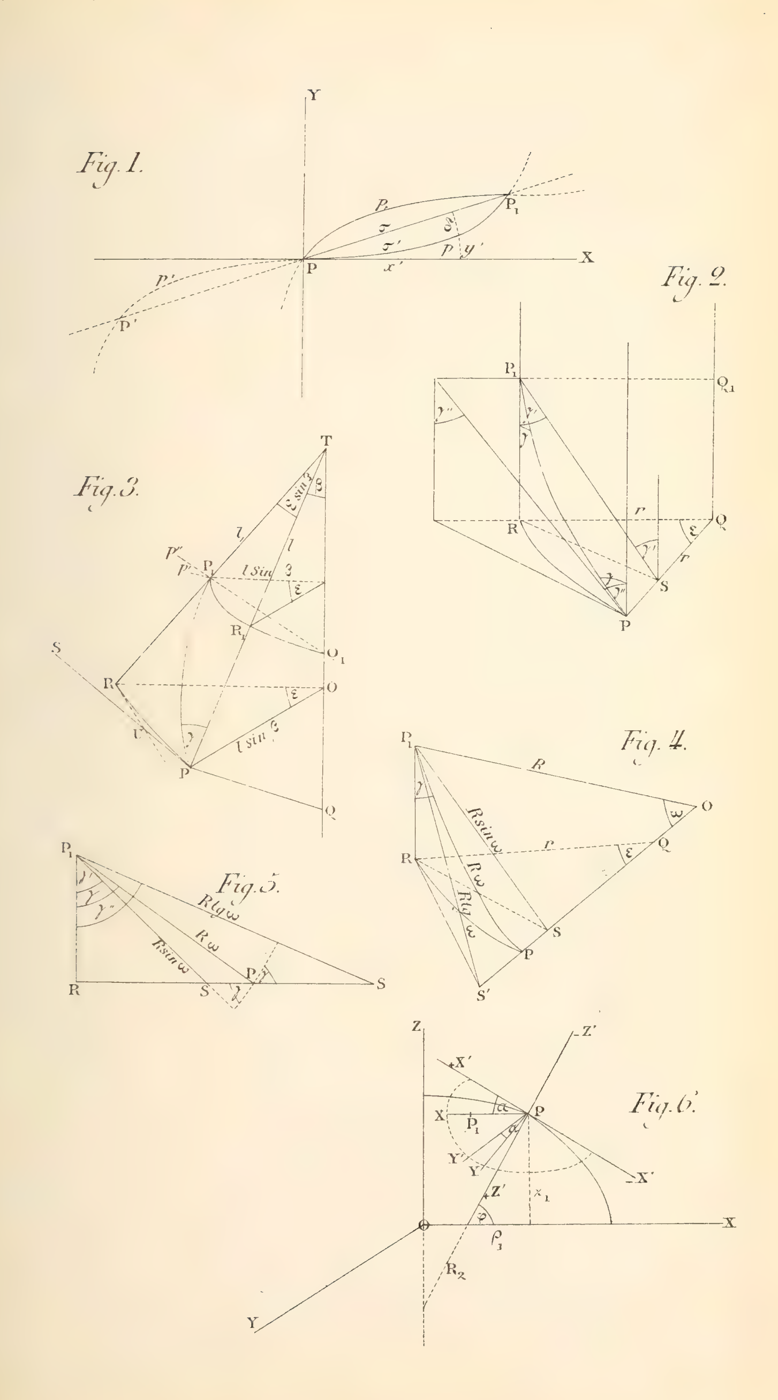
i h g f e d c b a

10.

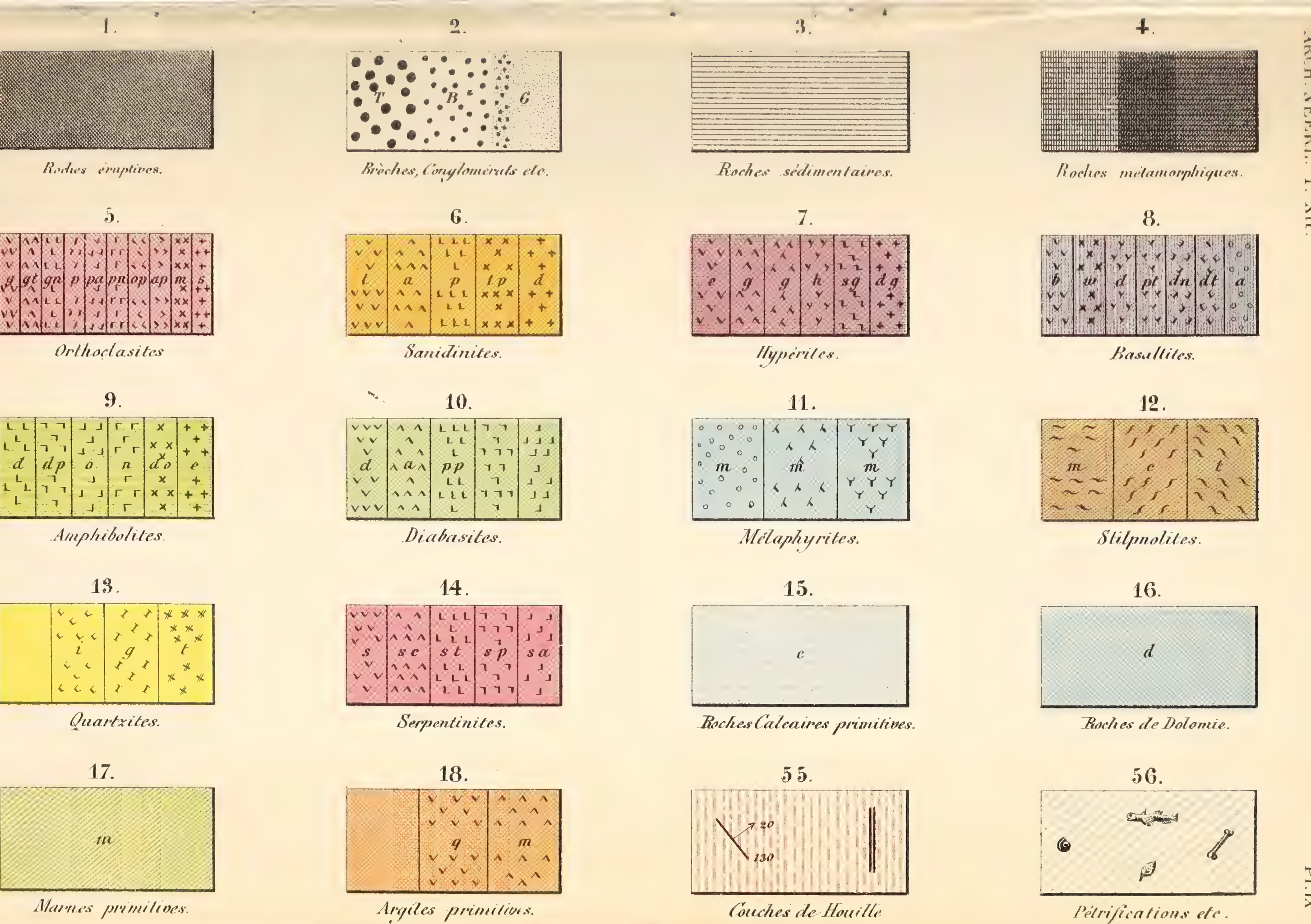
h

i g f e d c b a

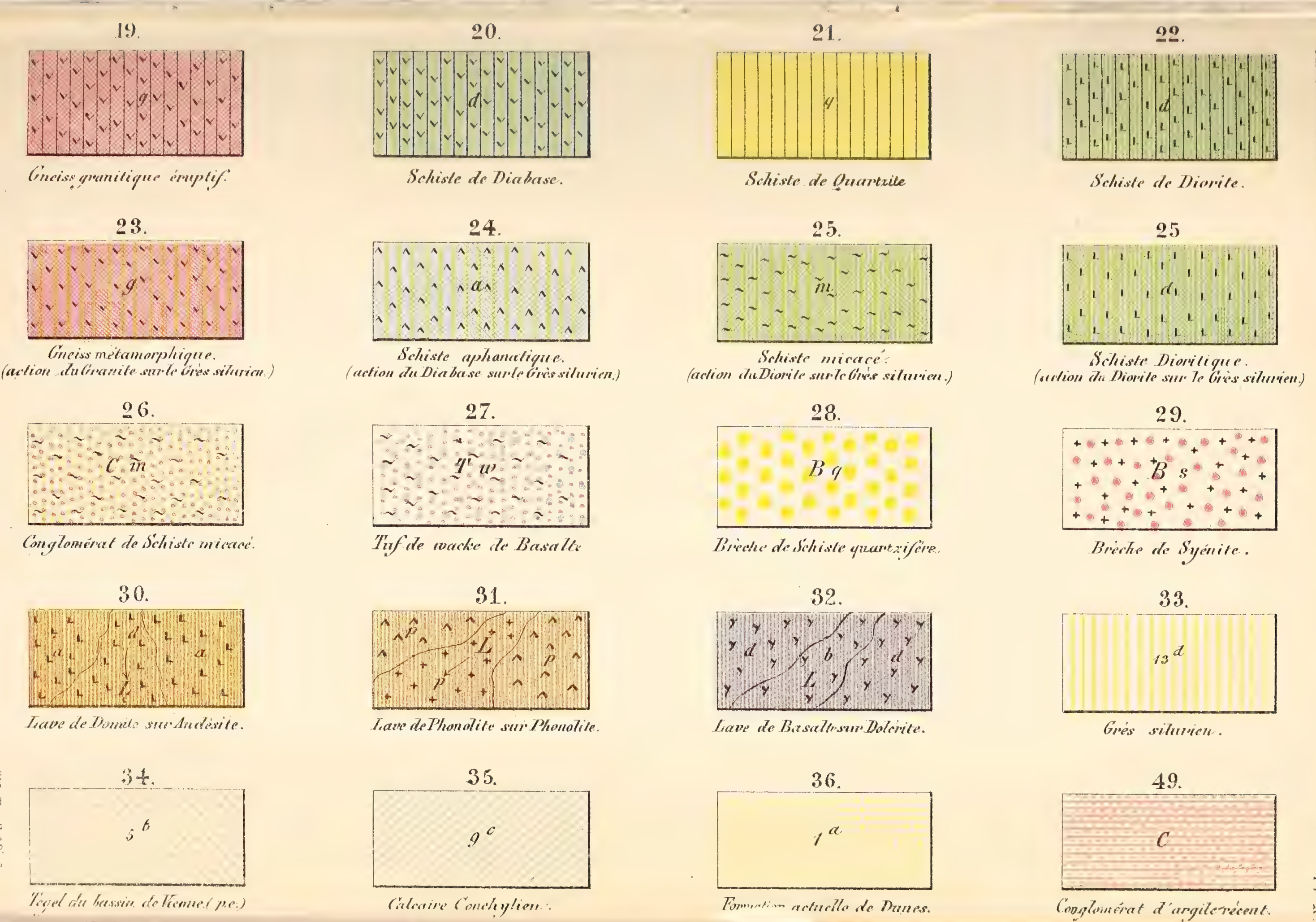
Steend. P.W.M. Trap, Utrecht.



Lith. Emrik & Binger.

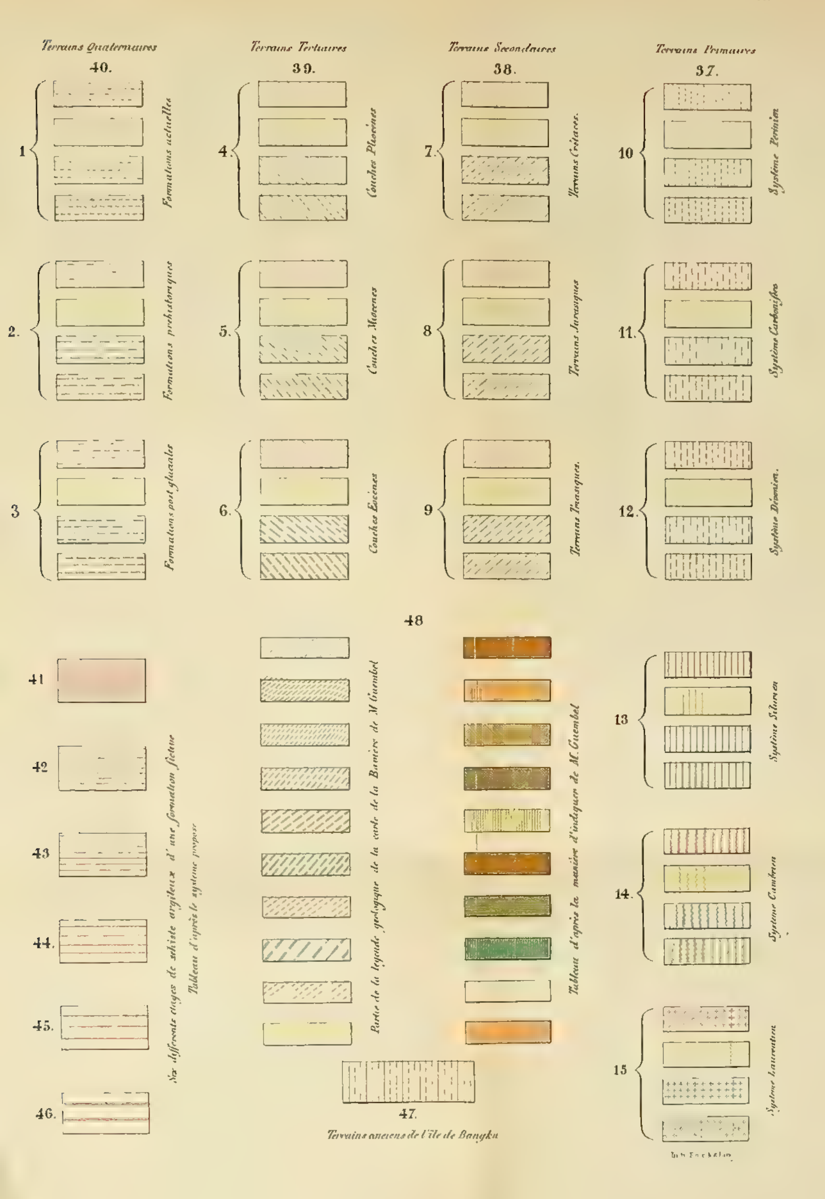


Lith. Emrik & Binger.


19. g
Gneiss granitique éruptif.
20. d
Schiste de Diabase.
21. q
Schiste de Quartzite
22. d
Schiste de Diorite.
23. g
Gneiss métamorphique.
(action du Granite sur le Grès silurien.)
24. a
Schiste aphanitique.
(action du Diabase sur le Grès silurien.)
25. m
Schiste micacé.
(action du Diorite sur le Grès silurien.)
25 d
Schiste Dioritique.
(action du Diorite sur le Grès silurien.)
26. C m
Conglomérat de Schiste micacé.
27. T w
Tuf de wacke de Basalte
28. B q
Brèche de Schiste quartzifère.
29. B s
Brèche de Syénite.
30. a d a L
Lave de Domite sur Andésite.
31. p L p p
Lave de Phonolite sur Phonolite.
32. d b L d
Lave de Basalte sur Dolérite.
33. 13 d
Grès silurien.
34. 5 b
Tegel du bassin de Vienne (p.c.)
35. 9 c
Calcaire Conchylien.
36. 1 a
Formation actuelle de Dunes.
49. C
Conglomérat d'argile récent.
Lith. Emrik & Binger

1.

2.


Terrains Quaternaires
40.
1
Formations actuelles
2.
Formations préhistoriques
3
Formations post glaciales
Terrains Tertiaires
39.
4.
Couches Pliocènes
5.
Couches Miocènes
6.
Couches Eocènes
Terrains Secondaires
38.
7.
Terrains Crétacés.
8
Terrains Jurassiques
9
Terrains Triasiques.
Terrains Primaires
37.
10
Système Permien
11.
Système Carbonifère
12.
Système Dévonien.
13
Système Silurien
14.
Système Cambrien
15
Système Laurentien
41
42
43
44.
45.
46.
Six différents étages de schiste argileux d'une formation fictive
Tableau d'après le système proposé
48
Partie de la légende géologique de la carte de la Bavière de M. Guembel
Tableau d'après la manière d'indiquer de M. Guembel
47.
Terrains anciens de l'île de Bangka


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01305 3038